TENTAMENSSKRIVNING **FUNKTIONSTEORI**
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **FMAF01**
MATEMATIK **2017–03–13 kl. 8–13**

Hjälpmedel: Bifogat formelblad. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsvärda och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. a) För vilka $z \in \mathbb{C}$ är funktionen $z \mapsto |z|^2$ komplext deriverbar? (0.2)

b) Gäller trigonometriska ettan, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, för alla $z \in \mathbb{C}$? (0.2)

c) Är det sant att $\operatorname{Log}(z^2) = 2\operatorname{Log}(z)$ om $\operatorname{Re} z > 0$? Här betecknar Log principalgrenen av logaritmfunktionen. (0.2)

d) Antag att $R > 0$ och att $z \in \mathbb{C}$ är sådant att $|z| < R$. Visa att

$$\operatorname{Re} \frac{R+z}{R-z} > 0. \qquad (0.2)$$

e) Bestäm talen a och b så att talföljden (u_k) definierad av $u_k = 2^k + 3^k$ uppfyller rekursionsekvationen $u_{k+2} + au_{k+1} + bu_k = 0$. (0.2)

2. a) Låt γ vara en kurva som kan parametriseras av $z = e^{it}$, $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Beräkna, med hjälp av definitionen, kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{1+z^2}{z}\,dz. \qquad (0.5)$$

b) Formulera Cauchys integralsats. Ge ett exempel på en kurvintegral som du *enkelt* kan beräkna med Cauchys integralsats, men för vilken beräkning med hjälp av definitionen verkar hopplös. (0.5)

3. Avgör, för var och en av serierna nedan, för vilka *reella* x den konvergerar. $(0.3 + 0.3 + 0.4)$

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+ix)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(1+1/k)^{k^2}}$

4. Beräkna, för $t \in \mathbb{R}$, integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+x^2)^2}\,dx$.

5. Låt f och g vara 2π-periodiska funktioner sådana att $f(x) = x$ och $g(x) = x^2$ för $x \in [-\pi, \pi)$. Visa att den trigonometriska Fourierserien för f inte konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$, men att den trigonometriska Fourierserien för g gör det. Beräkna även summan av serien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

6. I den här uppgiften betraktar vi den modifierade Besselfunktionen I_0. Vi låter den vara definierad via sin potensserieutveckling,

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Visa att I_0 uppfyller differentialekvationen

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - x^2 y(x) = 0. \tag{0.3}$$

b) Beräkna, för heltal $k \geqslant 0$, integralen

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{|z|=1} \frac{(z + 1/z)^k}{z} \, dz. \tag{0.3}$$

c) Visa att

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos\theta} \, d\theta. \tag{0.4}$$

Lycka till!