LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2016–12–22 kl 8 – 13

HJÄLPMEDEL: Utdelat formelblad.
Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt talföljden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defineras genom

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^n, \qquad a_0 = 1, a_1 = 1.$$

a) Bestäm lösningen till rekursionsekvationen. (0.8)

b) Konvergerar serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n$? (0.2)

2. a) Bestäm alla (komplexa) lösningar till ekvationen $\cos(z+\frac{3}{2}\pi) = -2$. (0.7)

b) Om man utvecklar funktionen $f(z) = \dfrac{1}{\cos(z+\frac{3}{2}\pi)+2}$ i en potensserie $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, vilken konvergensskiva har den potenserien? (Du behöver inte beräkna koefficienterna a_n!) (0.3)

3.a) Beräkna den exponentiella och trigonometriska Fourierserien för den 2π-periodiska funktionen $f(t) = |\sin t|$ och rita f i intervallet $[-\pi, \pi]$. (0.7)

b) Beräkna seriesumman $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$. (0.3)

4. Låt $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ vara en hel funktion. Antag att $u(x,y) = g(x)\cos y$ för en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion g. Bestäm $f(z)$ som uppfyller $f(0) = 1+i$ och $f(i\frac{\pi}{2}) = 2i$.

5. a) Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{1+x^2}\,dx.$ (0.6)

b) Låt γ vara en sluten slät kurva i $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$. Vilka värden kan integralen $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(2z)}{1+z^2}\,dz$ anta? (0.4)

6. a) För vilka komplexa tal z konvergerar/divergerar serien $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{1-z^n}$? (0.7)

b) För ett naturligt tal n defineras funktionsvärdet $\psi(n)$ som antalet positiva delare till n. Exempelvis delar $1, 2, 3, 6$ talet 6 och $\psi(6) = 4$. Visa att

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^\infty \psi(n) z^n$$

för $|z| < 1$. (0.3)

Lycka till!