LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2016–10–27 kl 8 – 13

HJÄLPMEDEL: Utdelat formelblad.
Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt talföljden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defineras genom

$$a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n, \qquad a_0 = 17, a_1 = 5.$$

a) Bestäm lösningen till rekursionsekvationen. (0.7)
b) Beräkna $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$. (0.3)

2. a) Hitta det största område i vilket funktionen $f(z) = \text{Log}\,(z - 2 - 4i)$ är holomorf (Log betyder principalgrenen). (0.4)

b) Låt $u(x, y)$ och $v(x, y)$ vara realdelen respektive imaginärdelen av en hel funktion. Visa att $u \cdot v$ är harmonisk. Räcker det att bara anta att u och v är harmoniska? Motivera ditt svar. (0.6)

3 a) Vilken konvergensskiva har potensserierna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z-\pi)^n}{n(n+1)}$ respektive $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$? (0.6)

b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x+n}{n^2} \ ?$$

Konvergerar serien absolut för något $x \in \mathbb{R}$? (0.4)

4. Betrakta den 2π-periodiska funktionen $f(t)$ så att $f(t) = |t|(\pi - |t|)$ för $t \in [-\pi, \pi]$.
a) Rita f i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ och beräkna den trigonometriska Fourierserien för f.(0.6)

b) Bestäm seriesumman $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. (0.4)

5. a) Låt $(f_n(x))$ vara en funktionsföljd definerad på ett gemensamt område D. Vad menas med att funktionsföljden konvergerar punktvis i D? Vad menas med att funktionsföljden konvergerar likformigt i D? Ge också ett tillräckligt villkor som garanterar att

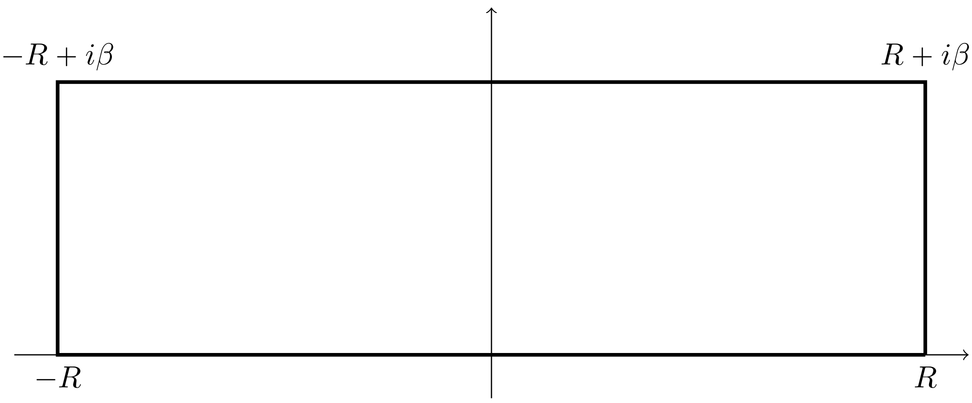
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(0.5)

b) Betrakta funktionsföljden $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}, x \geq 0$. Vad är det punktvisa gränsvärdet $f(x)$ för $f_n(x)$ då $n \to \infty$? Konvergerar $f_n(x)$ likformigt i $(0,\infty)$? Konvergerar $\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ mot $\int_0^\infty f(x)\,dx$? Använd resultatet i 6 d) (utan bevis). (0.5)

6. Låt $\alpha > 1$ vara ett reellt tal och $f(z) = \dfrac{e^z}{e^{\alpha z}+1}$. För (fixerat) $0 < \beta \in \mathbb{R}$ och (stora) $0 < R \in \mathbb{R}$, betrakta rektangelkonturen $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ med

$\gamma_1 = [-R, R]$, $\gamma_2 = [R, R+i\beta]$, $\gamma_3 = [R+i\beta, -R+i\beta]$ och $\gamma_4 = [-R+i\beta, -R]$.



Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{\alpha x}+1}\,dx$ på följande sätt.

a) Visa att $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 0.$ (0.2)

b) Välj ett lämpligt β så att $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = C\int_{\gamma_3} f(z)\,dz$ för något $C \in \mathbb{C}$. (0.3)

c) Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$ (0.3)

d) Utgående från c) visa att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha+1}\,dx = \frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$ för $\alpha > 1$. (0.2)

Lycka till!