

Hjälpmedel: Utdelat formelblad.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Lös differensekvationen

$$x_n - 4x_{n-1} + 5x_{n-2} = -2^{n-2}, \quad n \geq 2,$$

med begynnelsevärdena  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ .

2. Bestäm en holomorf funktion  $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  sådan att  $f(0) = i$  samt att

$$u(x, y) = x - 4xy.$$

Ange svaret som en funktion av  $z = x + iy$ .

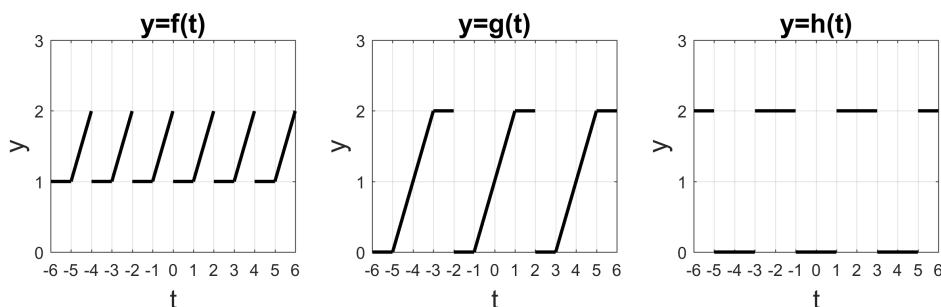
3. Vilka av serierna

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, & \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, & \text{d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}, \\ \text{e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}, & \text{f)} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k}, & \text{g)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{(1+i)k}, & \text{h)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+2}{k+1}, \end{array}$$

är konvergenta och vilka är divergenta? Motivera dina svar.

Bedömning: 0 – 3 rätt ger 0 poäng. Därefter 0.2 poäng per korrekt motiverat svar.

4. De periodiska funktionerna  $f, g$  och  $h$  ges av graferna nedan.



a) Vilken av funktionerna har en trigonometrisk Fourierserie på formen

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi t}{2} ? \quad (0.3)$$

b) Bestäm

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2. \quad (0.5)$$

c) Konvergerar den trigonometriska Fourierserien likformigt då  $-4 < t < 4$ ?

(0.2)

Var god vänd!

5. a) Vilket är det största område där  $\sqrt{1-z}$  är analytisk, om  $\sqrt{z}$  definieras med hjälp av logaritmens principalgren. (0.3)
- b) Låt  $\sigma_a$  vara cirkeln  $|z| = a$  genomlöst ett varv i positiv led. Avgör för vilka värden på  $a$  som integralen

$$\int_{\sigma_a} \frac{\sqrt{1-z}}{1+3z^2} dz$$

är väldefinierad samt beräkna integralen för dessa värden på  $a$ . Här skall  $\sqrt{z}$  definieras på samma sätt som i a). Svaret skall förenklas. (0.7)

6. a) Bestäm en lösning i form av en potensserie till differentialekvationen

$$z^2 f''(z) + f(z) = \frac{1}{3+z^2}.$$

Beräkna även konvergensradien  $R$ . (0.4)

- b) Bestäm  $f(0)$  samt visa att

$$\left| f(z) - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{1}{18}, \quad \text{då } |z| \leq 1,$$

där  $f$  är lösningen i a). (0.3)

- c) Beräkna

$$\int_{\sigma} \frac{1}{f(z)} dz,$$

där  $\sigma$  är enhetscirkeln genomlöst ett varv i positiv led och  $f$  är lösningen i a). Resultatet i b) får användas även om man ej lyckats visa det. (0.3)

**LYCKA TILL!**