TENTAMENSSKRIVNING	**FUNKTIONSTEORI**
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA	**FMAF01**
MATEMATIK	**2016–03–14 kl. 14–19**

Hjälpmedel: Bifogat formelblad. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Låt

$$s_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n.$$

Bestäm en formel för s_n, till exempel genom att lösa en rekursionsekvation med $s_n - s_{n-1}$ i vänsterledet.

2. a) Visa att

$$\operatorname{Re}\big(2\operatorname{Log}(1 - e^{i\theta})\big) = \ln\big(2 - 2\cos\theta\big).$$

Här antas det att $0 < \theta < 2\pi$. (0.5)

b) Antag att u och v utgör real- respektive imaginärdel av en holomorf funktion f på $\mathbb{C}$. Visa att f måste vara konstant om $u + v$ är konstant. (0.5)

3. a) Påstående: För varje par av kurvor γ_1 och γ_2 som startar i 0 och slutar i $1 + i$ gäller det att

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}\, dz = \int_{\gamma_2} \bar{z}\, dz.$$

Bevisa påståendet om det är sant eller ge ett motexempel om det är falskt. (0.5)

b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \frac{1}{z^3 + z^2}\, dz,$$

där C är den kurva som kan parametriseras av $t \mapsto 2e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (0.5)

4. I denna uppgift betraktar vi potensserien

$$J(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} z^{2k}.$$

a) Visa att serien är konvergent för alla $z \in \mathbb{C}$ (vilket betyder att J är analytisk på hela $\mathbb{C}$). (0.3)

b) Gör en feluppskattning om $J(1)$ approximeras med

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}}. \qquad (0.3)$$

c) Gör en feluppskattning om $J(i)$ approximeras med

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{(k!)^2 2^{2k}}. \qquad (0.4)$$

5. Låt $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Beräkna serien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{b^2 + k^2},$$

till exempel genom att utveckla den 2π-periodiska funktionen f, som ges av $f(t) = e^{bt}$ på intervallet $0 \leqslant t < 2\pi$, i en trigonometrisk Fourierserie.

6. Vi påminner om att de hyperboliska funktionerna sinh och cosh definieras för alla $z \in \mathbb{C}$ genom

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{och} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Låt $R > 0$ och beteckna med Ω_R den rektangel som har hörn i $\pm R$ och $\pm R + i\pi/2$ (se figur nedan). Låt vidare funktionen f definieras som

$$f(z) = \frac{\cosh(z)}{\cosh(4z)}.$$

a) Bestäm samtliga poler för f i Ω_R, och beräkna motsvarande residyer. (0.2)

b) Verifiera att

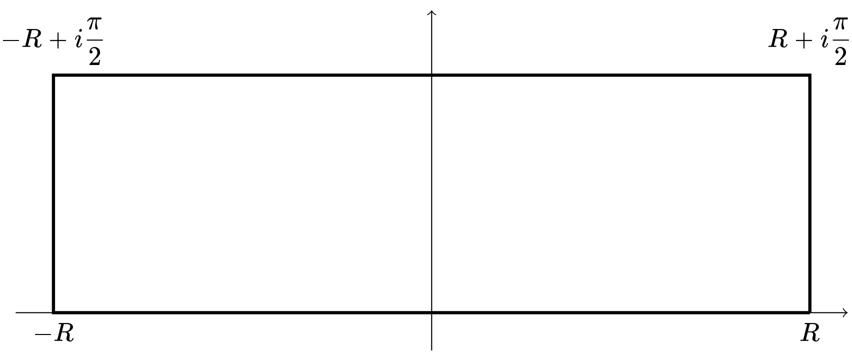
$$f\left(x + i\frac{\pi}{2}\right) = i\frac{\sinh(x)}{\cosh(4x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{0.2}$$

c) Visa uppskattningen

$$|f(\pm R + it)| \leqslant 4e^{-3R}, \quad t \in \mathbb{R},\ R > 1. \tag{0.2}$$

d) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh(x)}{\cosh(4x)}\, dx. \tag{0.4}$$



Lycka till!