LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Fourieranalys
29 maj 2006
Skrivtid: 08.00–13.00

Lösningar

1. Fourierkoefficienterna blir

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx = \ldots = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\frac{(-1)^n}{1-in}.$$

så Fourierserien för f är $\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}$. Parsevals formel ger nu

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$

2. Då Neumanns randvillkor gäller ansätter vi $u(x,t) = \sum_0^{\infty} T_n(t)\cos(nx)$. Insättning i vågekvationen ger

$$u(x,t) = (A_0 + B_0 t) + \sum_{1}^{\infty}(A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt))\cos(nx).$$

Startvillkoret $u(x,0) = 0$ ger $A_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$. Termvis derivering och startvillkoret $u_t'(x,0) = x$ ger

$$nB_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \ldots = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

och $B_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$. Lösningen blir därför

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2}t - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin((2k+1)t)\cos((2k+1)x).$$

3. Enligt tabell är $\mathcal{F}\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = 2\frac{\sin\xi}{\xi}$, så inversionsformeln ger $\mathcal{F}\{\frac{\sin x}{x}\} = \pi\chi_{[-1,1]}(\xi)$. Enligt formeln för Fouriertransformen av en translaterad funktion är därför

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(x+a)}{x+a} - \frac{\sin x}{x}\right\} = \pi(e^{ia\xi} - 1)\chi_{[-1,1]}(\xi).$$

Plancherels formel ger nu

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin(x+a)}{x+a} - \frac{\sin x}{x}\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left|\pi(e^{ia\xi} - 1)\right|^2 d\xi = \ldots = 2\pi(1 - \frac{\sin a}{a}).$$

Gränsvärdet då $a \to 0$ blir därför 0.

Var god vänd!

4. En direkt beräkning ger $\mathcal{F}\{g\} = (\xi - ia)^{-1}$ och $\mathcal{F}\{h\} = (\xi + ia)^{-1}$. Inversionsformeln ger därmed $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{g\}\} = \mathcal{F}\{(x - ia)^{-1}\} = -2\pi h(\xi)$ och $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{h\}\} = \mathcal{F}\{(x + ia)^{-1}\} = -2\pi g(\xi)$.

Vi använder oss sedan av formeln för Fouriertransformen av en faltning. Då $a = 1$ får vi för $\xi > 0$ att

$$\hat{f}(\xi)(-2\pi i e^{-\xi}) = -2\pi i e^{-2\xi},$$

och sålunda $\hat{f}(\xi) = e^{-\xi}$ då $\xi > 0$. Då $a = -1$ får vi för $\xi < 0$ att

$$\hat{f}(\xi)(2\pi i e^{\xi}) = 2\pi i e^{2\xi},$$

och sålunda $\hat{f}(\xi) = e^{\xi}$ då $\xi < 0$. Alltså är $\hat{f}(\xi) = e^{-|\xi|} = \frac{1}{2\pi i}\mathcal{F}\{(x - i)^{-1} - (x + i)^{-1}\}$, så

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2 + 1}.$$

5. Partialintegration och produktformeln för sinus ger

$$\begin{aligned} a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln(\cos(x/2))\cos(kx)\,dx = \ldots \\ = \frac{1}{2\pi k}\int_0^\pi \frac{\cos((k - 1/2)x) - \cos((k + 1/2)x)}{\cos(x/2)}\,dx = \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \end{aligned}$$

för $k = 1, 2, \ldots$. Vidare är vänsterledet i andra ledtråden pga symmetri kring $x = \pi/2$

$$\int_0^\pi \ln(\tfrac{1}{2}\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\tfrac{1}{2}\sin x)\,dx = 2\int_0^\pi \ln(\tfrac{1}{2}\sin(t/2))\,(dt/2).$$

Från detta följer från andra ledtråden att

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln(\cos(x/2))\,dx = -\ln 2.$$

Enligt Dini's sats gäller därför att

$$\ln(\cos(x/2)) = -\ln 2 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}\cos(kx), \qquad |x| < \pi.$$

Speciellt för $x = 0$ fås $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.