



LUNDS  
UNIVERSITET

Matematikcentrum

Matematik NF

Tentamensskrivning  
Fourieranalys  
29 maj 2006  
Skrivtid: 08.00–13.00

Inga hjälpmedel förutom bifogat formelblad. Använd institutionens papper. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Tydliga men ej alltför långa motiveringar ska lämnas. Figur ritas i förekommande fall.

1. Låt  $f(x) = e^x$  för  $|x| < \pi$ .
  - a) Bestäm Fourierserien för  $f$ .
  - b) Beräkna summan av serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ .
2. Finn en funktion  $u(x, t)$  som löser följande:

$$\begin{cases} u''_{tt}(x, t) = u''_{xx}(x, t), & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u'_x(0, t) = 0 = u'_x(\pi, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u'_t(x, 0) = x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

3. a) Låt  $a \in \mathbf{R}$  vara en konstant. Beräkna Fouriertransformen

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(x+a)}{x+a} - \frac{\sin x}{x}\right\}.$$

- b) Beräkna  $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin(x+a)}{x+a} - \frac{\sin x}{x}\right|^2 dx$  och ange integralens gränsvärde då  $a \rightarrow 0$ .
4. a) Låt  $a > 0$  vara en positiv konstant och definiera

$$g(x) = \begin{cases} ie^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -ie^{ax}, & x < 0. \end{cases}$$

Beräkna Fouriertransformerna  $\mathcal{F}\{g\}$ ,  $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{g\}\}$ ,  $\mathcal{F}\{h\}$  och  $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{h\}\}$ .

- b) Bestäm funktionen  $f(x)$  som uppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y+ia} dy = \begin{cases} (x+2i)^{-1}, & a=1, \\ (x-2i)^{-1}, & a=-1. \end{cases}$$

5. a) Utveckla  $f(x) = \ln(\cos(x/2))$ ,  $|x| < \pi$ , i cosinusserie.

$$\text{Ledning: } \int_0^\pi \frac{\cos((n+1/2)t)}{\cos(t/2)} dt = (-1)^n \pi,$$

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{2} \sin x\right) dx = \int_0^\pi \ln(\sin(\frac{x}{2})) dx + \int_0^\pi \ln(\cos(\frac{x}{2})) dx.$$

- b) Beräkna summan av den alternerande harmoniska serien  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .