



LUNDS  
UNIVERSITET

Matematikcentrum

Matematik NF

Tentamensskrivning  
Fourieranalys  
Torsdag den 12 januari 2006  
Skrivtid: 08.00–13.00

Inga hjälpmedel förutom bifogat formelblad. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Funktionen  $u$  definieras av

$$u(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < \pi. \end{cases}$$

a) Bestäm sinusserien för  $u$ .

b) Bestäm värdet av serierna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos k)^2}{k^2} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos k) \sin k}{k}.$$

2. Ange en lösning  $u(x, t)$  till följande problem:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u'_x(0, t) = u'_x(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \pi - 2x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

3. a) Bestäm Fouriertransformen av funktionen

$$u(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

b) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx.$$

4. Bestäm en funktion  $u$  sådan att

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} u(x - y) \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\sin 3x}{x}$$

för alla reella tal  $x$ .

5. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \right|^2 dx$$

där  $k$  är ett positivt heltal.