



LUNDS
UNIVERSITET

Matematikcentrum

Matematik NF

Tentamensskrivning
Fourieranalys
Tisdag den 21 december 2005
Skrivtid: 08.00–13.00

Inga hjälpmedel förutom bifogat formelblad. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Låt $u(x) = \cos ax$, $-\pi < x < \pi$, där talet a inte är heltal.

- Bestäm Fourierserien för u .
- Bestäm värdet av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2}.$$

2. Ange en lösning $u(x, t)$ till följande problem:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 3u_{xx}(x, t), & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

3. Bestäm en funktion u sådan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x - y)e^{-|y|} dy = e^{-x^2}$$

för alla reella tal x .

4. Låt $u(x) = \cos x$ för $|x| < \pi/2$ och $u(x) = 0$ för $|x| \geq \pi/2$.

- Bestäm Fouriertransformen av u .
- Bestäm värdet av integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\xi)}{1 - \xi^2} d\xi \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\xi)}{(1 - \xi^2)^2} d\xi$$

5. Låt u vara en periodisk funktion med period 2π och antag att u'' är kontinuerlig. Bevisa olikheten

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u'(x)|^2 dx \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u''(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

För vilka funktioner u gäller likhet i ovanstående olikhet?