LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2017–04–11 kl 8–10

Svar och anvisningar.

1. Låt K vara den ändliga kropp som avgränsas av xy-planet, xz-planet och yz-planet samt planet $y+z=1$ och planet $x=3$.

a) Beräkna flödet av fältet

$$\boldsymbol{F} = \big(5x + z\sin y,\ y^2 - z\arctan x,\ 4xy^4\big)$$

ut ur kroppen K. (0.5)

Svar: 17/2

Enligt divergenssatsen är

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz.$$

Eftersom $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 5+2y$, så ges flödet av

$$\begin{aligned}\iiint_K 5+2y\,dxdydz &= \int_0^3\int_0^1\left(\int_0^{1-y} 5+2y\,dz\right)dydx\\ &= \int_0^3\int_0^1 (5+2y)(1-y)\,dydx\\ &= 3\int_0^1 5-3y-2y^2dy = \ldots = 17/2.\end{aligned}$$

b) Beräkna

$$\int_\sigma 2xe^{-y}dx - (\cos z + x^2e^{-y})dy + y\sin z\,dz,$$

där σ är den orienterade kurvan sammansatt av räta linjen från $(0,0,0)$ till $(3,1,0)$, räta linjen från $(3,1,0)$ till $(3,0,1)$ och räta linjen från $(3,0,1)$ till $(0,1,0)$. (0.5)

Svar: -1

Vi ser direkt att $U(x,y,z) = x^2e^{-y} - y\cos z$ är en potentialfunktion, ty

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xe^{-y},\quad \frac{\partial U}{\partial y} = -x^2e^{-y} - \cos z,\quad \frac{\partial U}{\partial z} = y\sin z.$$

Det följer att

$$\int_\sigma \ldots = U(0,1,0) - U(0,0,0) = -1-0 = -1.$$

2. Låt Γ beteckna den del av cylindern $x^2+y^2=1$ som avgränsas av planen $x+y+z=0$ och $x+y+z=1$.

a) Bestäm arean av Γ. (0.2)

Svar: 2π

b) Beräkna

$$\int_{\partial\Gamma}(2xy^2z+x^2z)dx+2x^2yz\,dy+(x^2y^2-2z)dz$$

om ytan Γ är orienterad med utåtriktad normal och randkurvan $\partial\Gamma$ är positivt orienterad. (0.4)

Svar: 0

Sätt $\boldsymbol{F}=\big(2xy^2z+x^2z,\ 2x^2yz,\ x^2y^2-2z\big)$. Enligt Stokes sats är

$$\int_{\partial\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_{\Gamma}\mathrm{rot}(\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,dS.$$

Eftersom $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=(2x^2y-2x^2y,2xy^2+x^2-2xy^2,4xyz-4xyz)=(0,x^2,0)$ och $\boldsymbol{n}=(x,y,0)$, så är

$$\iint_{\Gamma}\mathrm{rot}(\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_{\Gamma}x^2y\,dS=\int_0^{2\pi}\cos^2t\sin t\,dt=0.$$

c) Beräkna

$$\int_{\gamma}-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy+\ln(z^2+1)dz,$$

där γ är skärningen mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och planet $x+y+z=1$, och orienteringen är vald så att kurvan går ett varv runt z-axeln moturs (sett uppifrån). (0.4)

Svar: 2π

På ungefär samma sätt som i Exempel 10.7 (p. 344–345) ser vi att

$$\int_{\gamma}\ldots=\int_{\gamma_1}-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy+\ln(z^2+1)dz,$$

där γ_1 är enhetscirkeln i xy-planet (orienterad moturs). Av detta följer att

$$\int_{\gamma}\ldots=\int_0^{2\pi}\sin^2t+\cos^2t+0\,dt=2\pi.$$