LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2016–08–20 kl 8–10

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Sätt $\boldsymbol{F} = (x+y, z+y, xyz)$ och låt K vara den kropp som beskrivs av

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 3.$$

a) Bestäm divergensen och rotationen av vektorfältet $\boldsymbol{F}$. (0.2)

Svar: $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 2 + xy, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = (xz - 1, -yz, -1)$.

b) Rita en skiss av kroppen K och beräkna arean av randen till K. (0.4)

Svar: K är en kon, $A = 9\pi(1+\sqrt{2})$.

c) Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ ut ur K. (0.4)

Svar: 18π.

2. a) Är

$$\boldsymbol{V} = \left(2xz + y^2 - x^2, 2yx + z^2 - y^2, 2zy + x^2 - z^2\right)$$

ett potentialfält i $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$? (0.3)

Svar: Ja, ty $\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = \mathbf{0}$ och $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ är enkelt sammanhängande.

b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (2x - 3yz)dx + (2y - 3xz)dy + (2z - 3xy)dz,$$

där γ är kurvan som ges av $\boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{t},\ e^t \sin t + t\cos t,\ \sin^2 t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. (0.3)

Svar: $2\pi(1+2\pi)$ [$U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$ är en potential].

c) Beräkna arbetet som fältet $\boldsymbol{W} = (3z, 2x, y)$ uträttar längs skärningskurvan mellan sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$ och planet $x+y+z = 0$. Välj själv orientering och ange vilken orientering du använder. (0.4)

Svar: $\pm 2\pi\sqrt{3}$ [skärningskurvan är en storcirkel, använda t.ex. Stokes' sats].