LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2016–04–12 kl 8–10

Svar och anvisningar.

1. Låt Γ vara ytan som ges av

$$2z + x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

a) Beräkna arean av Γ. (0.2)

Svar: $\frac{2\pi}{3}\big(2\sqrt{2} - 1\big)$

Eftersom Γ är en funktionsyta (ty $z = \ldots$), så ges arean av

$$A = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dxdy,$$

där D är enhetscirkelskivan i xy-planet. Övergång till polära koordinater ger att

$$A = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{r^2 + 1}\, dr = \frac{2\pi}{3}\big[(r^2+1)^{3/2}\big]_0^1 = \frac{2\pi}{3}\big(2\sqrt{2} - 1\big).$$

Betrakta den kropp K som beskrivs av olikheterna

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad 2z \geq 1 - x^2 - y^2,$$

och låt $\boldsymbol{F}$ vara vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = \big(xz,\, yz,\, z^2\big).$$

b) Formulera divergenssatsen för $\boldsymbol{F}$ och kroppen K. (0.2)

Svar: Se Sats 10.4

c) Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom den totala begränsningsytan till K. (0.6)

Svar: $5\pi/6$

Enligt divergenssatsen är

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dxdydz.$$

Eftersom $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = z + z + 2z = 4z$, så ges flödet av

$$\iiint_K 4z\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 4z\, dz \right) dxdy$$
$$= 2 \iint_D \left(1 - x^2 - y^2 - \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)^2 \right) dxdy,$$

där D är enhetscirkelskivan i xy-planet. Övergång till polära koordinater ger att

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 4\pi \int_0^1 r(1 - r^2) - \frac{r}{4}(1 - r^2)^2\, dr = \ldots = 5\pi/6.$$

2. Låt $\boldsymbol{V}$ vara vektorfältet som ges av

$$\boldsymbol{V} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{z}{1+z^2} \right).$$

a) Bestäm rotationen av $\boldsymbol{V}$. (0.2)

<u>Svar</u>: $\mathrm{rot}(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{0}$

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{V}) = \left(0-0,\ 0-0,\ \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{-y}{x^2+y^2}\Big) \right) = (0,0,0).$$

b) Är $\boldsymbol{V}$ ett potentialfält i $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axeln}\}$? (0.3)

<u>Svar</u>: Nej

Även om $\mathrm{rot}(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{0}$ kan vi *inte* dra slutsatsen att $\boldsymbol{V}$ är ett potentialfält i $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axeln}\}$. Ty området $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axeln}\}$ är *inte* enkelt sammanhängande. Om γ är enhetscirkeln i xy-planet genomlöpt ett varv i positiv led runt z-axeln, så är

$$\int_\gamma \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\, dt = 2\pi \neq 0.$$

Därför är $\boldsymbol{V}$ *inte* ett potentialfält i $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axeln}\}$.

Planet $x + 2y + 3z = 4$ skär sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ i en kurva som kallas för γ_1 och planet $x = 1$ skär sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ i en kurva som kallas för γ_2.

c) Beräkna kurvintegralerna

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} \quad \text{och} \quad \int_{\gamma_2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där γ_1 och γ_2 genomlöps i positiv led sedd från origo. (0.5)

<u>Svar</u>: -2π och 0

Kurvan γ_1 är en cirkel som löper ett varv runt z-axeln i negativ led. Ty planet $x + 2y + 3z = 4$ skär z-axeln då $z = 4/3 < \sqrt{2}$ och

$$x^2 + y^2 \le 2 \quad \Rightarrow \quad x + 2y \le \sqrt{10} < 4,$$

vilket innebär att alla punkter på γ_1 har positiv z-koordinat. Låt Γ vara en yta som *inte* skär z-axeln och har γ (enhetscirkeln i xy-planet) och γ_1 som rand. Om γ_1 parametriseras av $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, där t är ett argument för $x(t) + iy(t)$, så kan vi t.ex. välja ytan som ges av

$$\boldsymbol{r}(s,t) = \big(sx(t) + (1-s)\cos(t),\ sy(t) + (1-s)\sin(t),\ sz(t)\big),$$
$$s \in [0,1],\ t \in [0, 2\pi].$$

Enligt Stokes sats är

$$\int_{\gamma+\gamma_1} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_\Gamma \mathrm{rot}(\boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0, \quad \text{dvs.} \quad \int_{\gamma_1} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = -2\pi.$$

Notera att γ_2 är en sluten kurve (en cirkel) i området $x > 0$ som är enkelt sammanhängande. Därmed är $\boldsymbol{V}$ ett potentialfält i $x > 0$ (ty $\mathrm{rot}(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{0}$) och det följer direkt att

$$\int_{\gamma_2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$