LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2015–04–13 kl 10–12

Svar och anvisningar.

1. Sätt $\boldsymbol{F} = \big(-2xy - y^2, y^2, z^2\big)$ och låt K vara den kropp som beskrivas av

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0.$$

a) Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F}$ ut ur kroppen K. (0.5)

Svar: 8π

Enligt divergenssatsen är

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{F} dxdydz.$$

Eftersom $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = -2y + 2y + 2z = 2z$, så ges flödet av

$$\iiint_K 2z \, dxdydz = \iint_D \Big(\int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} 2z \, dz\Big) dxdy = \iint_D \big(4 - (x^2+y^2)\big) dxdy,$$

där D är cirkelskivan i xy-planet med medelpunkt origo och radie 2. Övergång till polära koordinater ger nu att

$$\iint_D \big(4 - (x^2+y^2)\big) dxdy = 2\pi \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr = 2\pi(8-4).$$

b) Cylindern $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ skär randen till K för $z > 0$ och bildar kurvan γ. Beräkna

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där orienteringen av γ är valt så att kurvan går ett varv runt z-axeln moturs. (0.5)

Svar: 2π

Låt $\mathit{\Gamma}$ vara funktionsytan som beskrivas av

$$z = f(x,y) = \sqrt{4 - (x^2+y^2)}, \quad (x,y) \in D = \Big\{(x,y);\ \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 1\Big\}.$$

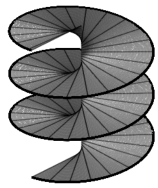
Då vet vi att $(-f'_x, -f'_y, 1)$ är en normal till $\mathit{\Gamma}$ som pekar "uppåt". Eftersom $\partial\mathit{\Gamma} = \gamma$ är positivt orienterad, ger Stokes sats att

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{\mathit{\Gamma}} (\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \, dS.$$

Vi har $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \big(0 - 0, 0 - 0, 0 - (-2x - 2y)\big) = \big(0, 0, 2x + 2y\big)$ och

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathit{\Gamma}} (0, 0, 2x+2y) \cdot \boldsymbol{n} \, dS &= \iint_D (2x+2y) dxdy \\
&= \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \big(2 + 2r(\cos\theta + \sin\theta)\big) r \, d\theta\Big) dr \\
&= 2\pi \int_0^1 2r \, dr = 2\pi.
\end{aligned}$$

2. Betrakta ytan $\mathit{\Gamma}$ som ges av parametriseringen



$$\boldsymbol{r}(u,v) = \big(v\cos u, v\sin u, u\big), \quad 0 \le u \le 6\pi, \quad 0 \le v \le 1.$$

a) Beräkna arean av $\mathit{\Gamma}$. (0.5)

Tips: Kom ihåg att

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\big|x+\sqrt{x^2+1}\big| + C.$$

Svar: $3\pi\big(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}\,)\big)$

Vi har

$$\boldsymbol{r}'_u = (-v\sin u, v\cos u, 1), \qquad \boldsymbol{r}'_v = (\cos u, \sin u, 0).$$

Så

$$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = (-\sin u, \cos u, -v)$$

och det följer att arean av $\mathit{\Gamma}$ ges av

$$A = \iint_{\mathit{\Gamma}} dS = \int_0^{6\pi}\bigg(\int_0^1 |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|dv\bigg)du = \int_0^{6\pi}\bigg(\int_0^1 \sqrt{1+v^2}\,dv\bigg)du$$
$$= 6\pi\int_0^1 \sqrt{1+v^2}\,dv = 6\pi\bigg(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}\bigg).$$

b) Beräkna

$$\int_\gamma 2xy^2z dx + 2x^2yz dy + (x^2y^2 - 2z)dz$$

längs kurvan γ given av

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \qquad 0 \le t \le 6\pi. \\ z = t, \end{cases}$$ (0.5)

Svar: $-36\pi^2$

Vi ser att

$$U(x,y,z) = x^2y^2z - z^2$$

är en potentialfunktion till fältet

$$(P,Q,R) = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2 - 2z).$$

Ty

$$U'_x = 2xy^2z = P, \quad U'_y = 2x^2yz = Q, \quad U'_z = x^2y^2 - 2z = R.$$

Eftersom $(1,0,0)$ är startpunkt och $(1,0,6\pi)$ är slutpunkt för γ, gäller det att

$$\int_\gamma \ldots = U(1,0,6\pi) - U(1,0,0) = -36\pi^2 - 0.$$