LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2014–08–29 kl 8–10

1. Låt $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ vara ett C^1-vektorfält i $\mathbb{R}^3$.

a) Visa att $\boldsymbol{F}$ är virvelfritt om det finns en funktion U i $\mathbb{R}^3$ så att $\boldsymbol{F} = \nabla U$. (0.2)

Svar: Se Sats 10.2

Planet $2x + z = 1$ skär ytan $z = x^2 + y^2$ i en kurva som kallas för γ.

Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{u} = (2ay, bx, x + z^2)$, där a och b är reella konstanter.

b) För vilka (a, b) blir
$$\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = 0\,? \qquad (0.4)$$

Svar: $b = 2a$

c) Beräkna
$$\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r}$$
för alla värden på (a, b) om γ är positivt orienterad. (0.4)

Svar: $2\pi(b - 2a)$

2. Betrakta kroppen K som ges av olikheterna
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad 1 \leq z \leq 2.$$

a) Bestäm arean av randen till K. (0.4)

Svar: 19π

b) Beräkna flödet av fältet
$$\boldsymbol{F} = \big(xz + \ln z, -yz + \sin x, x + y^2 + 2z\big)$$
ut ur kroppen K. (0.5)

Svar: $40\pi/3$

c) Är K en 'källa' eller en 'sänka' för fältet $\boldsymbol{F}$? (0.1)

Svar: En källa