**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**TENTAMENSSKRIVNING**
**Tredimensionell vektoranalys**
**2014–04–03 kl 8–10**

Svar och anvisningar.

**1.** Låt $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ vara ett $C^1$-vektorfält i $\mathbb{R}^3$ och låt $K \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en kropp.

a) Definiera divergensen av $\boldsymbol{F}$ och formulera Gauss sats med alla förutsättningar på $K$ och $\partial K$. (0.3)

Svar: Se kapitel 10.3 (speciellt Sats 10.4).

b) Betrakta nu kroppen $K$ som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 + 1 \leq z^2 \quad \text{och} \quad 1 \leq z \leq 2.$$

Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F} = \big(x^3 z, y^3 z, -(x^2+y^2)z^2\big)$ ut ur kroppen $K$. (0.4)

Svar: Vi har

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 3x^2 z + 3y^2 z - 2(x^2+y^2)z = (x^2+y^2)z$$

så enligt Gauss sats är

$$\begin{aligned}\iint_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS &= \iiint_K (x^2+y^2)z\, dxdydz \\ &= \iint_D (x^2+y^2)\Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2+1}}^{2} z\, dz\Big) dxdy,\end{aligned}$$

där $D = \big\{(x,y);\, x^2+y^2 \leq 3\big\}$. Övergång till polära koordinater ger nu att

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\Big(2 - \frac{x^2+y^2+1}{2}\Big) dxdy &= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{3}} r^2 \Big(2 - \frac{r^2+1}{2}\Big) r\, dr\Big) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \Big(\frac{3}{2}r^3 - \frac{1}{2}r^5\Big) dr = \frac{9\pi}{4}.\end{aligned}$$

c) Bestäm alla värden på den reella konstanten $a$ så att

$$\iint_\Gamma \boldsymbol{F}_a \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0,$$

där $\Gamma$ är ytan

$$x^2 + y^2 + 1 = z^2, \quad x^2 + y^2 \leq 3, \quad z \geq 1,$$

och fältet $\boldsymbol{F}_a$ ges av

$$\boldsymbol{F}_a(x,y,z) = \big(2xz - x, -a^2 yz, z - 2\big). \qquad (0.3)$$

Svar: Observera att $\Gamma$ och cirkelskivan $D_2 = \big\{(x,y,z);\, x^2+y^2 \leq 3, z = 2\big\}$ utgör randen till $K$. Eftersom $\boldsymbol{F}_a \cdot \boldsymbol{n} = 0$ på $D_2$ (ty $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$ och $z - 2 = 0$) så följer det att

$$\iint_\Gamma \boldsymbol{F}_a \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_{\partial K} \boldsymbol{F}_a \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{F}_a\, dxdydz.$$

Vi har

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}_a = 2z - 1 - a^2 z + 1 = (2 - a^2)z$$

och ser alltså att $\operatorname{div} \boldsymbol{F}_a > 0$ (el. $< 0$) på hela $K$ om $a^2 < 2$ (resp. $> 2$).

Slutsatsen är att

$$\iint_{\Gamma} \boldsymbol{F}_a \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0 \text{ om och endast om } a^2 = 2, \text{ dvs. } a = \pm\sqrt{2}.$$

**2.** Betrakta ytan $\mathcal{C}$ som ges av parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(s,t) = \big(\cos s, \sin s, t\big), \quad 0 \le s \le 2\pi,\ -2 \le t \le 2.$$

a) Rita en skiss av $\mathcal{C}$ och bestäm dess area. (0.3)

Svar: $\mathcal{C}$ är en cylinder med area $8\pi$.

b) Beräkna rotationen av vektorfältet $\boldsymbol{F} = \big(x\cos y, x\sin y, z^2\big)$ och bestäm sedan värdet av

$$\int_{\partial\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där randen till $\mathcal{C}$ är positivt orienterad. (0.4)

Svar: Vi har

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \big(0 - 0, 0 - 0, \sin y - (-x\sin y)\big) = \big(0, 0, (x+1)\sin y\big)$$

så enligt Stokes sats är

$$\int_{\partial\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{\mathcal{C}} (\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0,$$

eftersom $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ är ortogonal mot $\boldsymbol{n} = (x, y, 0)$.

c) Planet $x+y+z=0$ skär $\mathcal{C}$ i en ellips $\gamma$ och delar ytan i två lika stora delar. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{y\,dx}{x^2+y^2} - \frac{x\,dy}{x^2+y^2} + z\,dz,$$

där orienteringen av $\gamma$ är valt så att kurvan går ett varv runt $z$-axeln moturs. (0.3)

Svar: Om vi sätter

$$\boldsymbol{G} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, z\right)$$

så är $\operatorname{rot} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$ (kolla!). Vi kan *inte* dra slutsatsen att $\boldsymbol{G}$ är ett potentialfält, ty $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axeln}\}$ är *inte* enkelt sammanhängande.

Men Stokes sats använt på den övre delen av $\mathcal{C}$ ger att

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\sigma} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där $\sigma$ är cirkeln $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$ genomlöpt ett varv runt $z$-axeln moturs. Vi ser direkt att

$$\int_{\sigma} \frac{y\,dx}{x^2+y^2} - \frac{x\,dy}{x^2+y^2} + z\,dz = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot (-\sin t) - \cos t \cdot \cos t + 2 \cdot 0\, dt = -2\pi,$$

vilket även är värdet av integralen längs $\gamma$.