LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2014–01–07 kl 14–16

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Är

$$\boldsymbol{u} = \big(2xz - x^2 + y^2, 2xy - y^2 + z^2, 2yz - z^2 + x^2\big)$$

ett potentialfält i $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$? (0.3)

Svar: Ja, ty $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ och $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ är enkelt sammanhängande.

b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (x - yz)dx + (y - xz)dy + (z - xy)dz,$$

där γ är kurvan som ges av $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{t}\cos t, e^t \sin t, \sqrt{t}\,)$, $t \in [0, 2\pi]$. (0.3)

Svar: 2π $\big[\, U(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - xyz$ är en potential $\big]$

c) Beräkna arbetet som fältet $\boldsymbol{u} = (4z, x, 2y)$ uträttar längs skärningskurvan mellan ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ och planet $y = 1$. Kurvan är orienterad medurs sedd från origo. (0.4)

Svar: 4π $\big[$skärningskurvan ges av $x^2 + z^2 = 1$, använda t.ex. Stokes' sats$\big]$

2. Sätt $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}(zy^2x^2)$.

a) Beräkna divergensen och rotationen av $\boldsymbol{F}$. (0.2)

Svar: $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 2z(x^2 + y^2)$ och $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$.

b) Låt K vara den kropp som beskrivas av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom den totala begränsningsytan till kroppen K. (0.4)

Svar: $32\pi/3$.

c) Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ upp genom ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$. (0.4)

Svar: $40\pi/3$.