LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2016–04–12 kl 8–10

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt Γ vara ytan som ges av

$$2z + x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 \le 1.$$

a) Beräkna arean av Γ. (0.2)

Betrakta den kropp K som beskrivs av olikheterna

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \quad 2z \ge 1 - x^2 - y^2,$$

och låt $\boldsymbol{F}$ vara vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = \big(xz,\, yz,\, z^2\big).$$

b) Formulera divergenssatsen för $\boldsymbol{F}$ och kroppen K. (0.2)

c) Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom den totala begränsningsytan till K. (0.6)

2. Låt $\boldsymbol{V}$ vara vektorfältet som ges av

$$\boldsymbol{V} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2},\, \frac{x}{x^2+y^2},\, -\frac{z}{1+z^2}\right).$$

a) Bestäm rotationen av $\boldsymbol{V}$. (0.2)

b) Är $\boldsymbol{V}$ ett potentialfält i $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axeln}\}$? (0.3)

Planet $x + 2y + 3z = 4$ skär sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ i en kurva som kallas för γ_1 och planet $x = 1$ skär sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ i en kurva som kallas för γ_2.

c) Beräkna kurvintegralerna

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} \ \text{ och } \ \int_{\gamma_2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där γ_1 och γ_2 genomlöps i positiv led sedd från origo. (0.5)

LYCKA TILL !