LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Tredimensionell vektoranalys
2014–04–03 kl 8–10

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ vara ett C^1-vektorfält i $\mathbb{R}^3$ och låt $K \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en kropp.

a) Definiera divergensen av $\boldsymbol{F}$ och formulera Gauss sats med alla förutsättningar på K och ∂K. (0.3)

b) Betrakta nu kroppen K som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 + 1 \leq z^2 \text{ och } 1 \leq z \leq 2.$$

Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F} = \big(x^3 z, y^3 z, -(x^2 + y^2)z^2\big)$ ut ur kroppen K. (0.4)

c) Bestäm alla värden på den reella konstanten a så att

$$\iint_{\Gamma} \boldsymbol{F}_a \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0,$$

där Γ är ytan

$$x^2 + y^2 + 1 = z^2, \quad x^2 + y^2 \leq 3, \quad z \geq 1,$$

och fältet $\boldsymbol{F}_a$ ges av

$$\boldsymbol{F}_a(x, y, z) = \big(2xz - x, -a^2 yz, z - 2\big).$$ (0.3)

2. Betrakta ytan $\mathcal{C}$ som ges av parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(s, t) = \big(\cos s, \sin s, t\big), \quad 0 \leq s \leq 2\pi, \ -2 \leq t \leq 2.$$

a) Rita en skiss av $\mathcal{C}$ och bestäm dess area. (0.3)

b) Beräkna rotationen av vektorfältet $\boldsymbol{F} = \big(x\cos y, x\sin y, z^2\big)$ och bestäm sedan värdet av

$$\int_{\partial\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där randen till $\mathcal{C}$ är positivt orienterad. (0.4)

c) Planet $x+y+z = 0$ skär $\mathcal{C}$ i en ellips γ och delar ytan i två lika stora delar. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{y\, dx}{x^2 + y^2} - \frac{x\, dy}{x^2 + y^2} + z\, dz,$$

där orienteringen av γ är valt så att kurvan går ett varv runt z-axeln moturs. (0.3)

LYCKA TILL !