Flerdimensionell analys, 2019-06-01, Lösningar

1. Vi beräknar

$$f'_x = 2xe^y, \quad f'_y = -e^y + (x^2 - y)e^y, \quad \text{speciellt} \quad f'_x(2,0) = 4, \quad f'_y(2,0) = 3.$$

Vi normerar vår riktning till $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$, och beräknar riktningsderivatan

$$f'_{\mathbf{v}} = \operatorname{grad} f(2,0) \cdot \mathbf{v} = (4,3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Tangenplanets ekvation i $(2, 0, f(2,0))$ ges nu av

$$z - f(2,0) = f'_x(2,0) \cdot (x-2) + f'_y(2,0) \cdot (y-0)$$
$$\Leftrightarrow \quad z - 4 = 4(x-2) + 3y \quad \Leftrightarrow \quad \underline{4x + 3y - z - 4 = 0}.$$

2. Vi byter variabler med det föreslagna variabelbytet. Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = y f'_u, \qquad f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = x f'_u + f'_v$$

Vi sätter in dessa derivator i differentialekvationen, och får

$$x f'_x - y f'_y = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad xy f'_u - y(x f'_u + f'_v) = y^2$$
$$\Leftrightarrow \quad -y f'_v = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad f'_v = -y \quad \Leftrightarrow \quad f'_v = -v.$$

Vi löser nu denna ekvation:

$$f'_v = -v \quad \Leftrightarrow \quad f = -\frac{v^2}{2} + g(u),$$

där g är en funktion av en variabel. Återgång till variablerna x, y ger slutligen

$$f(x,y) = \underline{-\frac{y^2}{2} + g(xy)}.$$

Med vårt villkor $f(x,x) = x^4$ får vi speciellt

$$f(x,x) = -\frac{x^2}{2} + g(x^2) = x^4 \quad \Leftrightarrow \quad g(x^2) = x^4 + \frac{x^2}{2},$$

och vi ser att $g(t) = t^2 + \frac{t}{2}$, vilket ger

$$f(x,y) = \underline{-\frac{y^2}{2} + (xy)^2 + \frac{xy}{2}}.$$

3. Med polära koordinater beskrivs området D av $E : 0 \leq r \leq 2, \ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Funktionaldeterminanten blir som vanligt r, och integralen

$$\iint_D 2\sin(x^2+y^2)\,dxdy = \iint_E 2\sin(r^2)\,r\,drd\varphi = \int_0^2 2r\sin(r^2)\,dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi =$$
$$= \pi\left[-\cos(r^2)\right]_0^2 = \underline{\pi(1-\cos 4)}.$$

4. Kurvintegralen kan beräknas på ett flertal sätt, exempelvis genom att först ta fram potentialfunktionen

$$U(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + (y-1)e^y.$$

Vi får då direkt

$$\int_\gamma y^2x\,dx + \left(x^2y + ye^y\right)dy = U(2,4) - U(0,0) = 32 + 3e^4 - (-1) = \underline{3(11+e^4)}.$$

5. På ett kompakt område antas säkert största och minsta värde, antingen i en stationär punkt eller på randen. För att hitta stationära punkter löser vi systemet

$$\begin{cases} f'_x = 2y - 2xy = 2y(1-x) = 0 \\ f'_y = 2x - x^2 = x(2-x) = 0 \end{cases},$$

vilket ger punkterna $(0,0)$ och $(2,0)$. Den andra punkten ligger utanför vårt område, men vi beräknar $f(0,0) = 0$.

Vi undersöker nu randen:

A = aktuell del på y-axeln: $f(0,y) = 0$ för alla y.

B = aktuell del på linjen $y = 2$: $f(x,2) = 4x - 2x^2 = g(x)$. Derivering av $g(x)$ ger $g'(x) = 4 - 4x = 4(1-x)$, med nollstället $x = 1$. Vi beräknar därför $g(1) = 2$. (Vi tar triangelns hörn till sist.)

C = aktuell del på linjen $y = x$: $f(x,x) = 2x^2 - x^3 = h(x)$. Derivering ger $h'(x) = 4x - 3x^2 = x(4-3x)$, med nollställena $x = 0$ och $x = \frac{4}{3}$. Punkten $x = 0$ svarar mot ett hörn, men vi beräknar $h(\frac{4}{3}) = \frac{32}{27}$.

Slutligen undersöker vi hörnen:

$$f(0,0) = 0, \qquad f(0,2) = 0, \qquad f(2,2) = 0.$$

Vi ser att största värde är $\underline{2}$, och minsta $\underline{0}$.

6. Ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ är en ”dubbelkon”, och $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ är en sfär med radie $\sqrt{2}$ (centrum i origo). Om vi väljer att beräkna volymen av den kropp K som svarar mot den övre konen så beskrivs denna i rymdpolära koordinater av

$$L: 0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Funktionaldeterminanten blir som vanligt $r^2 \sin\theta$, och volymen

$$V = \iiint_K 1\,dxdydz = \iiint_L r^2 \sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_0^{\sqrt{2}} r^2\,dr \int_0^{\pi/4} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 0\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)}.$$

7. Vi optimerar $f(x, y) = (x+2)^2$ under bivillkoret $g(x, y) = \frac{x^3}{4} + y^3 = 1,\ x \geq 0, y \geq 0$, och börjar med att undersöka var gradienterna av f och g är parallella:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f \parallel \operatorname{grad} g \quad &\Leftrightarrow \quad (2(x+y), 2(x+y)) \parallel (\tfrac{3}{4}x^2, 3y^2) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) \\ \frac{3}{4}x^2 & 3y^2 \end{vmatrix} = 6(x+y)\big(y^2 - \tfrac{1}{4}x^2\big) = 0.\end{aligned}$$

Om $x + y = 0$ så har x och y olika tecken, vilket inte är aktuellt då vi befinner oss i första kvadranten, och $y^2 - \frac{1}{4}x^2 = 0$ ger $x = \pm 2y$, där vi bara intresserar oss för $x = 2y$. Insatt i bivillkoret får vi

$$\frac{8y^3}{4} + y^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3y^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{1/3} = 3^{-1/3},$$

och funktionsvärdet

$$f(2 \cdot 3^{-1/3}, 3^{-1/3}) = (3 \cdot 3^{-1/3})^2 = (3^{2/3})^2 = 3^{4/3}.$$

Vi beräknar även värdena i bivillkorets randpunkter $\big(4^{1/3}, 0\big)$ och $(0, 1)$:

$$f\big(4^{1/3}, 0\big) = (4^{1/3})^2 = 4^{2/3}, \qquad f(0, 1) = 1^2 = 1.$$

Eftersom $4^{2/3} = 2^{4/3} < 3^{4/3}$ får vi slutligen att största värde är $\underline{3^{4/3}}$, och minsta $\underline{1}$.

8. Med

$$(P, Q) = \left(\frac{2-y}{x^2 + (y-2)^2}, \frac{x}{x^2 + (y-2)^2}\right)$$

konstaterar vi att $Q'_x = P'_y$, så Greens formel är tillämpbar på alla områden som inte innehåller punkten $(0, 2)$ där fältet (P, Q) inte är definierat. Vi låter γ' vara den del av cirkeln med radie $2\sqrt{2}$ och centrum $(0, 2)$ som går från $(2, 0)$ till $(-2, 0)$ i positiv led. Då innesluter γ och γ' ett område D som inte innehåller $(0, 2)$, och vi får

$$\int_{\gamma'} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy = 0$$

Kurvan γ' kan parametriseras med $(x, y) = (2\sqrt{2}\cos t, 2\sqrt{2}\sin t + 2)$, $t : -\frac{\pi}{4} \to \frac{5\pi}{4}$. Detta ger att $x^2 + (y-2)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$, och vi får

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy &= \int_{\gamma'} P\,dx + Q\,dy = \\ &= \frac{1}{8}\int_{-\pi/4}^{5\pi/4} \Big(-2\sqrt{2}\sin t \cdot (-2\sqrt{2}\sin t) + 2\sqrt{2}\cos t \cdot 2\sqrt{2}\cos t\Big)\,dt = \\ &= \frac{1}{8}\int_{-\pi/4}^{5\pi/4} 8\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\,dt = \int_{-\pi/4}^{5\pi/4} 1\,dt = \frac{5\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{6\pi}{4} = \underline{\frac{3\pi}{2}}.\end{aligned}$$

9. En lokal extrempunkt måste här vara en stationär punkt, så vi börjar med att undersöka för vilka a punkten $(1,1)$ är stationär:

$$f'_x = ay^2 + 2x - 2y - a, \qquad f'_y = 2axy + 2y - 2x - 2a,$$

och vi ser att de partiella derivatorna blir lika med noll då $(x,y) = (0,0)$ för alla a, så $(1,1)$ ett stationär punkt för alla a.

Med

$$f''_{xx} = 2, \qquad f''_{xy} = 2ay - 2, \qquad f''_{yy} = 2ax + 2$$

får vi i punkten $(1,1)$ den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = 2h^2 + 4(a-1)hk + 2(a+1)k^2 = 2\big((h + (a-1)k)^2 + a(3-a)k^2\big).$$

Om $a(3-a) > 0$ (dvs om $0 < a < 3$) så är Q positivt definit, och $(1,1)$ en lokal minimipunkt. Om $a(3-a) < 0$ så är Q indefinit och $(1,1)$ ingen lokal extrempunkt. Gränsfallen $a = 0$ och $a = 3$, då Q är semidefinit, måste undersökas vidare:

Enklast fallet är $a = 0$ då $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geq 0$. Eftersom $f(1,1) = 0$ så är $(1,1)$ då en lokal minimipunkt.

Om $a = 3$ så blir $Q(h,k) = 2(h+2k)^2$. Den kvadratiska formen blir alltså noll då $h + 2k = 0 \Leftrightarrow h = -2k$. Vi beräknar därför $f(1-2k, 1+k) = -6k^3 - 6$, vilket visar att i en omgivning av $(1,1)$ antar f värden såväl större än $f(1,1) = -6$ (då $k < 0$) som mindre än -6 (då $k > 0$). Alltså kan $(1,1)$ inte vara en lokal extrempunkt.

Sammanfattningsvis får vi att $(1,1)$ en lokalt extrempunkt (minimipunkt) för f då $\underline{0 \leq a < 3}$.

10. Med hjälp av polära koordinater får vi

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{(r\cos\varphi)^2 r\sin\varphi}{r^2}\right| = r(\cos\varphi)^2|\sin\varphi| \leq r \to 0$$

då $r \to 0$. Således gäller det att $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, vilket visar att f är kontinuerlig i origo.

För att avgöra differentierbarheten konstaterar vi först att de partiella derivatorna f'_x och f'_y båda är 0 i origo. Eftersom dessutom $f(0,0) = 0$ måste det då, enligt definitionen av differentierbarhet, gälla att

$$f(0+h, 0+k) = \frac{h^2k}{h^2+h^2} = \sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k), \quad \text{där } \rho(h,k) \to 0 \text{ då } (h,k) \to (0,0),$$

för att f skall vara differentierbar i origo. Men löser vi här ut $\rho(h,k)$ och tillämpar polära koordinater får vi

$$\rho(h,k) = \frac{h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}(h^2+h^2)} = \frac{(r\cos\varphi)^2 r\sin\varphi}{r^3} = (\cos\varphi)^2\sin\varphi,$$

vilket inte går mot noll för alla vinklar φ. Vi konstaterar därför att f inte är differentierbar i origo.