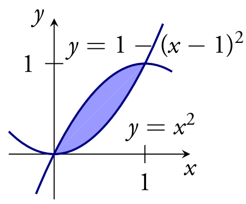
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2018-10-31

1. Kurvornas skärningspunkter fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = 1 - (x-1)^2 \\ y = x^2. \end{cases}$$

Sätts ekvationerna lika får man ekvationen $1 - (x-1)^2 = x^2$ vilket är ekvivalent med $2 - x^2 - 2x = x^2$ och $x - x^2 = 0$. Andragradsekvationen har lösningarna $x = 0$ och $x = 1$ så skärningspunkterna blir $(0,0)$ och $(1,1)$. Detta ger figuren intill. Då begränsningsparablerna är givna är det lättare att integrera i y-led först varför



$$\iint_D 6x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{1-(x-1)^2} 3x \,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x = \int_0^1 3x(1 - (x-1)^2 - x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 6x^2 - 6x^3 \,\mathrm{d}x = \Big[2x^3 - \frac{3}{2}x^4 \Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Svar: Dubbelintegralens värde är $1/2$.

2. Kedjeregeln ger

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 2f'_u$$
$$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = -2y f'_u + f'_v$$

vilket sammantaget ger för vänsterledet i differentialekvationen

$$y f'_x + f'_y = 2y f'_u - 2y f'_u + f'_v = f'_v.$$

Efter variabelbytet blir differentialekvationen

$$f'_v = -v^3$$

som har lösningen $f(u,v) = -\frac{1}{4}v^4 + g(u)$ där g är godtycklig C^1-funktion. I de ursprungliga variablerna blir detta

$$f(x,y) = -\frac{1}{4}y^4 + g(2x - y^2).$$

Villkoret $f(x,0) = x^2$ ger nu $g(2x) = x^2$ och därmed $g(x) = \frac{1}{4}x^2$. Alltså är

$$f(x,y) = -\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{4}(2x - y^2)^2 = x^2 - xy^2.$$

Svar: Enda lösningen är $f(x,y) = x^2 - xy^2$.

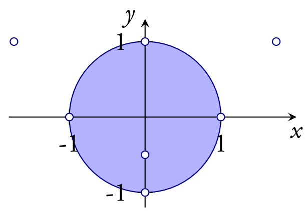
3. a) Stationära punkter uppfyller ekvationen

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2xy = 0, \\ f'_y = -x^2 + 1 + 2y = 0. \end{cases}$$

Den första ekvationen $2x(1-y) = 0$ har lösningarna $x = 0$ och $y = 1$ vilka insatta i den andra ekvationen ger $1 + 2y = 0$ respektive $-x^2 + 3 = 0$ med lösningarna $y = -1/2$ respektive $x = \pm\sqrt{3}$. De stationära punkterna är alltså $(0, -1/2)$ och $(\pm\sqrt{3}, 1)$. För att avgöra karaktär beräknas $f''_{xx} = 2 - 2y$, $f''_{xx} = -2x$ samt $f''_{xx} = 2$. Detta ger för $(0,0)$ den kvadratiska formen $Q(h,k) = 2h^2 + 2k^2$ som är positivt definit varför $(0,0)$ är lokal minimipunkt. För punkterna $(\pm\sqrt{3}, 1)$ blir den kvadratiska formen $Q(h,k) = \mp 2\sqrt{3}hk + 2k^2 = 2(k \mp \sqrt{3}h)^2 - 6k^2$ indefinit varför dessa är sadelpunkter.

Svar: Stationära punkter är $(0, -1/2)$ lokalt minimum och $(\pm\sqrt{3}, 1)$ sadelpunkter.

b) Eftersom cirkelskivan är kompakt och f är C^1 så antas de största och minsta värdena i antingen stationära punkter eller på randen. Av de stationära punkterna är det bara $(0, -1/2)$ som ligger i enhetscirkelskivan. Värdet i $(0, -1/2)$ är $f(0, -1/2) = -1/4$.



För att undersöka f på randen $x^2 + y^2 = 1$ kan man använda att där är

$$x^2 - yx^2 + y + y^2 = x^2 + y^2 + y(1 - x^2) = 1 + y \cdot y^2 = 1 + y^3$$

där $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Det är uppenbart att f antar alla värden mellan 0 och 2 på randen. Detta ser man också med standardparametriseringen $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t < 2\pi$ av enhetscirkeln för då får man

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin t \cos^2 t + \sin t + \sin^2 t = 1 + \sin^3 t$$

efter att ha använt trigonometriska ettan två gånger. Ser man inte direkt största och minsta värda så ger derivering stationära punkter då t är 0, $\pi/2$, π och $3\pi/2$.

Största och minsta värde finner man genom att jämföra värdet i den stationära punkten med största och minsta värdet på randen.

Svar: Största värde är 2 och minsta $-1/4$.

4. a) Tangentplanet till paraboloiden $x^2 + 2y^2 - z = 0$ i punkten (x, y, z) har en normalvektor som ges av paraboloidens gradient $(2x, 4y, -3)$. I punkten $(2, 1, 2)$ blir gradienten $(4, 4, -3)$. Därmed är $(4, 4, -3)$ en normalvektor till tangenplanet som då kan skrivas $4(x-2) + 4(y-1) - 3(z-2) = 0$ eller $4x + 4y - 3z = 6$.

Svar: Tangentplanets ekvation är $4x + 4y - 3z = 6$.

b) Denna måste vara parallell med planets normalvektor $(2, -4, -1)$, dvs för någon konstant λ

$$(2x, 4y, -3) = \lambda(2, -4, -1).$$

Härav ser man att $\lambda = 3$, $x = 3$ och $y = -3$. Koordinaten z får man av paraboloidens ekvation, alltså $3^2 + 2(-3)^2 - 3z = 0$ vilket ger $z = 9$.

Svar: I punkten $(3, -3, 9)$ är tangentplanet parallellt med det givna planet.

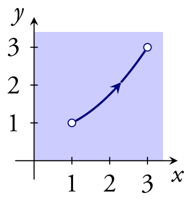
5. a) Att (P, Q) är ett potentialfält betyder att det finns en potentialfunktion U sån att $\operatorname{grad} U = (U'_x, U'_y) = (P, Q)$. Då är $P'_y = (U'_x)'_y = U''_{xy}$ lika med $Q'_x = (U'_y)'_x = U''_{xy}$.

b) Med beteckningarna $P = \dfrac{x^2 - 2y^2}{x^2 y}$ och $Q = \dfrac{2y^2 - x^2}{xy^2}$ så ser man att både P och Q är C^1 i området $x > 0$ och $y > 0$. Vidare är

$$P'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 - 2y^2}{x^2 y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} - \frac{2y}{x^2}\right) = -\frac{1}{y^2} - \frac{2}{x^2} = -\frac{x^2 + 2y^2}{x^2 y^2}$$

och

$$Q'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y^2 + xy^2 - x^2}{xy^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{x} + 1 - \frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{y^2} = -\frac{2y^2 + x^2}{x^2 y^2}.$$



Alltså är fältet (P, Q) ett potentialfält i det enkelt sammanhängande området $x > 0$, $y > 0$. Därmed finns det en potential som löser systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} U'_x = P = \dfrac{1}{y} - \dfrac{2y}{x^2} \\ U'_y = Q = \dfrac{2}{x} + 1 - \dfrac{x}{y^2}. \end{cases}$$

Första ekvationen ger

$$U = \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} + g(y)$$

där g är en godtycklig C^1 av en variabel. Då blir

$$U'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{2}{x} + g'(y)$$

vilket jämfört med den andra ekvationen ger $g'(y) = 1$. Således måste $g(y) = y + C$ där C är en konstant som vi kan välja till 0. Alltså är

$$U(x, y) = \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} + y$$

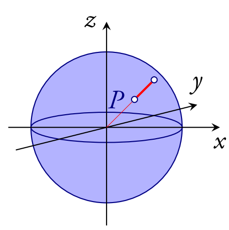
en potential och bågintegralen kan nu beräknas

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(3,3) - U(1,1) = \frac{3}{3} + 2\frac{3}{3} + 3 - \frac{1}{1} - 2\frac{1}{1} - 1 = 2.$$

Alternativt kan bågintegralen beräknas genom att man utnyttjar att en kurvintegral av ett konservativt fält är oberoende av integrationsväg varför man istället kan beräkna kurvintegralen längs den räta linjen mellan $(1, 1)$ och $(3, 3)$.

Svar: Bågintegralens värde är 2.

6. Vi kan välja koordinatsystem så att klotet har medelpunkt i origo. Eftersom kortaste vägen från randen till origo är längs radien så blir det kortaste avståndet från en punkt skillnaden mellan radiens längd R och avståndet till medelpunkten. Om punktens koordinater är (x, y, z) så ges avståndet från punkten till randen av funktionen



$$f(x, y, z) = R - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Medelvärdet av avståndet till randen ges då av

$$\frac{1}{\mu(K)}\iiint_K R-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

där $\mu(K)=4\pi R^3/3$ är volymen av klotet K. Trippelintegralen kan lätt beräknas med hjälp av rymdpolära koordinater över området

$$K'=\{(r,\theta,\varphi);0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$$

och vi får

$$\begin{aligned}\iiint_K R-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_{K'}(R-r)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^R Rr^2-r^3\,\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\theta=\left[\frac{Rr^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right]_0^R\big[-\cos\theta\big]_0^\pi\big[\varphi\big]_0^{2\pi}\\ &= \left(\frac{R^4}{3}-\frac{R^4}{4}\right)4\pi=\frac{\pi R^4}{3}.\end{aligned}$$

Delas detta med klotets volym får man

$$\frac{\pi R^4/3}{4\pi R^3/3}=\frac{R}{4}.$$

Svar: Medelvärdet av avståndet till randen blir $R/4$.