LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Flerdimensionell analys
2018-06-02, Lösningar

1. Med polära koordinater beskrivs området av $E : 0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$. Funktionaldeterminanten blir som vanligt r, och integralen

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \iint_E \frac{r^2}{1+r^2}\,r\,drd\varphi = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{1+r^2}\,dr \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi = [\text{pol.div.}] =$$

$$= \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\sqrt{2}} \left(r - \frac{r}{1+r^2}\right) dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2} - \tfrac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\ln 3 - (0 - \tfrac{1}{2}\ln 1)\right) = \underline{\frac{\pi}{4}(2 - \ln 3)}.$$

2. a) Vi beräknar

$$f'_x = 2xy + y^2 + 3, \quad f'_y = x^2 + 2xy, \quad \text{speciellt} \quad f'_x(1,-1) = 2, \quad f'_y(1,-1) = -1.$$

Tangenplanets ekvation i $(1,-1,3)$ ges nu av

$$z = 3 + f'_x(1,-1)\cdot(x-1) + f'_y(1,-1)\cdot(y-(-1))$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 3 + 2(x-1) - (y+1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{2x - y - z = 0}.$$

b) Funktionen växer snabbast i gradientens riktning, med en tillväxt som är lika med längden av gradienten. Riktningen blir därför

$$\operatorname{grad} f(1,-1) = \left(f'_x(1,-1), f'_y(1,-1)\right) = \underline{(2,-1)},$$

och tillväxten blir

$$|\operatorname{grad} f(1,-1)| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \underline{\sqrt{5}}.$$

c) För att hitta stationära punkter löser vi systemet

$$\begin{cases} f'_x = 2xy + y^2 + 3 = 0 \\ f'_y = x^2 + 2xy = x(x+2y) = 0 \end{cases}.$$

Andra ekvationen ger $x = 0$ eller $x = -2y$. Alternativet $x = 0$ ger i första ekvationen $y^2 + 3 = 0$, vilket saknar lösning. Alternativet $x = -2y$ ger

$$-4y^2 + y^2 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3y^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1,$$

och således punkterna $(2,-1)$ och $(-2,1)$.

För den kvadratiska formen beräknar vi

$$f''_{xx} = 2y, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 2x + 2y, \quad f''_{yy} = 2x.$$

För punkten $(2,-1)$ blir

$$Q(h,k) = -2h^2 + 2\cdot 2hk + 4k^2 = -2(h^2 - 2hk - 2k^2) = -2((h-k)^2 - 3k^3),$$

som är indefinit. Punkten $(-2,1)$ ger

$$Q(h,k) = 2h^2 - 2\cdot 2hk - 4k^2 = 2(h^2 - 2hk - 2k^2) = 2((h-k)^2 - 3k^3),$$

som också är indefinit. Sammanfattningsvis är alltså båda stationära punkterna sadelpunkter, så f <u>saknar</u> lokala extrempunkter.

3. a) Vi byter variabler med det föreslagna variabelbytet. Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = y f'_u, \qquad f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = x f'_u + f'_v$$

Vi sätter in dessa derivator i differentialekvationen, och får

$$\begin{aligned} x f'_x - y f'_y = xy \quad &\Leftrightarrow \quad xy f'_u - y(x f'_u + f'_v) = xy \\ \Leftrightarrow \quad -y f'_v = xy \quad &\Leftrightarrow \quad -v f'_v = u \quad \Leftrightarrow \quad f'_v = -\frac{u}{v}. \end{aligned}$$

Vi löser nu denna ekvation:

$$f'_v = -\frac{u}{v} \quad \Leftrightarrow \quad f = -u \ln v + g(u),$$

där är en funktion av en variabel. Återgång till variablerna x, y ger slutligen

$$f(x, y) = \underline{-xy \ln y + g(xy)}.$$

b) Vi sätter $t = x^2y^2$. Kedjeregeln ger då

$$f'_x = g'\, t'_x = 2xy^2 g', \qquad f'_y = g'\, t'_y = 2x^2 y g'$$

Vi sätter in dessa derivator i differentialekvationen, och får

$$\begin{aligned} 2x f'_x - y f'_y = \frac{1}{x^2y^2} \quad &\Leftrightarrow \quad 4x^2y^2g' - 2x^2y^2g' = \frac{1}{x^2y^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2y^2g' = \frac{1}{x^2y^2} \\ \Leftrightarrow \quad g' = \frac{1}{2(x^2y^2)^2} \quad &\Leftrightarrow \quad g'(t) = \frac{1}{2t^2} \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = -\frac{1}{2t} + C, \end{aligned}$$

där C är en konstant. Återgång till variablerna x, y ger slutligen

$$f(x, y) = \underline{-\frac{1}{2x^2y^2} + C}.$$

4. a) Vi kan parametrisera γ enligt $(x(t), y(t)) = (t, t^2 - 1)$, $t : -1 \to 0$, så

$$\begin{aligned} \int_\gamma y\,dx - x\,dy &= \int_{-1}^{0} \big((t^2-1)\cdot 1 - t \cdot 2t\big)\,dt = \int_{-1}^{0} \big(-1 - t^2\big)\,dt \\ &= \left[-t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 0 - \big(1 + \tfrac{1}{3}\big) = \underline{-\tfrac{4}{3}}. \end{aligned}$$

b) Vi har vektorfältet $(P, Q) = (y, -x)$, så $Q'_x = -1$ och $P'_y = 1$. Det gäller alltså att $Q'_x \neq P'_y$, och således kan det inte finnas någon potential. Det går alltså <u>inte</u> att beräkna I med hjälp av potentialfunktion.

c) Vi kompletterar integrationsvägen med de räta linjestyckena γ_1 från $(0, -1)$ till $(0, 0)$ och γ_2 från $(0, 0)$ till $(-1, 0)$, och får, enligt Greens formel, att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy \; + \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy \; + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy \; = \iint_D \big(Q'_x - P'_y\big)\,dxdy,$$

där D är området som omsluts av de tre kurvorna. På γ_1 är $Q = 0$, $dx = 0$, och på γ_2 är $P = 0$, $dy = 0$. Det gäller alltså att

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy \;=\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy \;= 0,$$

så

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy \;= \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = \iint_D -2\,dxdy = -2\int_{-1}^{0}\left(\int_{x^2-1}^{0} 1\,dy\right) dx =$$
$$= -2\int_{-1}^{0}\left(0-(x^2-1)\right) dx = -2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = -2\left(0-\left(-1+\tfrac{1}{3}\right)\right) = \underline{-\tfrac{4}{3}}.$$

5. Vi skall beräkna volymen av en kropp där den undre ytan ges av $z = x^2 + y^2$, och den övre av $z = (1 + x^2 + y^2)/3$. För att beräkna skärningen av dessa ytor löser vi, med $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$r^2 = \frac{1+r^2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad 3r^2 = 1 + r^2 \quad\Leftrightarrow\quad r^2 = \tfrac{1}{2} \quad\overset{r\geq 0}{\Leftrightarrow}\quad r = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Kroppens projektion D i xy-planet är alltså en cirkelskiva med radie $1/\sqrt{2}$ och centrum i origo, som i polära koordinater beskrivs av $E : 0 \leq r \leq 1/\sqrt{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Volymen vatten blir därför

$$V = \iint_D \left(\frac{1+x^2+y^2}{3} - (x^2+y^2)\right) dxdy = \iint_E \left(\frac{1+r^2}{3} - r^2\right) r\,drd\varphi =$$
$$= \tfrac{1}{3}\iint_E \left(r - 2r^3\right) drd\varphi = \tfrac{1}{3}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(r-2r^3\right) dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2}\right]_0^{1/\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{2\pi}{3}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\tfrac{1}{8} = \underline{\frac{\pi}{12}}\ \ (\text{dm}^3).$$

För att finna höjden på vattenytan i vila så söker vi volymen från ytan $z = x^2 + y^2$ till planet $z = C$, och bestämmer därefter konstanten C så att denna volym blir samma som ovan. Nu får vi skärningen genom $r^2 = C$, dvs. $r = \sqrt{C}$, och projektionen D i xy-planet beskrivs i polära koordinater av $E : 0 \leq r \leq \sqrt{C},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Vi får

$$V_C = \iint_D \left(C - (x^2+y^2)\right) dxdy = \iint_E \left(C - r^2\right) r\,drd\varphi =$$
$$= \iint_E \left(Cr - r^3\right) drd\varphi = \int_0^{\sqrt{C}} \left(Cr - r^3\right) dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\left[\frac{Cr^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{C}} =$$
$$= 2\pi\left(\frac{C^2}{2} - \frac{C^2}{4}\right) = \frac{\pi C^2}{2}.$$

Slutligen bestämmer vi C:

$$\frac{\pi C^2}{2} = \frac{\pi}{12} \quad\Leftrightarrow\quad C^2 = \tfrac{1}{6} \quad\overset{C\geq 0}{\Leftrightarrow}\quad C = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Vattenytan når alltså till höjden $\underline{1/\sqrt{6}}$ (dm) när glaset är i vila.

6. a) På ett kompakt område antas säkert största och minsta värde, antingen i en stationär punkt eller på randen. Eftersom $f'_x = -e^{y^2-x} \neq 0$ saknas stationära punkter, men vi undersöker randen:

A = aktuell del på x-axeln: Här är $y = 0$ och $f(x, 0) = e^{-x}$ är avtagande i x. Intressanta värden finns därför i hörnen.

B = aktuell del på y-axeln: Här är $x = 0$ och $f(0, y) = e^{y^2}$ är växande i y. Intressanta värden finns därför återigen i hörnen.

C = kurvan $x^2 + y^3 = 1$: Eftersom denna kurva blir svår att parametrisera ser vi problemet som optimering med bivillkor, där vi har bivillkoret $g(x, y) = x^2 + y^3 = 1$. Vi söker punkter där gradienterna av f och g är parallella:

$$\operatorname{grad} f \parallel \operatorname{grad} g \quad \Leftrightarrow \quad (-e^{y^2-x}, 2ye^{y^2-x}) \parallel (2x, 3y^2) \quad \overset{e^{y^2-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad (-1, 2y) \parallel (2x, 3y^2)$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & 2y \\ 2x & 3y^2 \end{vmatrix} = -3y^2 - 4xy = -y(3y + 4x) = 0.$$

Då $y = 0$ ger bivillkoret $x = 1$, och vi är i ett av hörnen. Om $3y + 4x = 0$ har x och y olika tecken, vilket inte är aktuellt då vi befinner oss i första kvadranten.

Intressanta punkter är alltså endast hörnen, och vi beräknar

$$f(0, 0) = e^0 = 1, \qquad f(1, 0) = e^{-1} = \tfrac{1}{e}, \qquad f(0, 1) = e^1 = e.$$

Vi ser att största värde blir $\underline{e}$, och minsta $\underline{1/e}$.

b) Det gäller att $f(x, y) = e^{y^2-x} > 0$, och då $f(x, 0) = e^{-x} \to 0$ då $x \to \infty$ ser vi direkt att något minsta värde aldrig kommer att antas.

För att hitta ett eventuellt största värde sveper vi över vårt område med linjer $x = a$, där vi låter a gå från 0 till ∞. För varje a är $f(a, y) = e^{y^2-a} = e^{-a}e^{y^2}$ en växande funktion i y, så största värde finns på den övre gränsen, dvs. på kurvan $y = \sqrt{x}$. Här gäller det att $f(x, \sqrt{x}) = e^{x-x} = e^0 = 1$, och detta gäller för varje värde på a. Vi kan således dra slutsatsen att största värde som $f(x, y)$ antar på vårt område är 1.

Sammanfattningsvis gäller det alltså att största värde är $\underline{1}$, vilket antas i alla punkter på kurvan $y = \sqrt{x}$, men att minsta värde saknas.