

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkändtel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = (x^2 - y)e^y$. Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(2, 0)$ i riktningen $(-1, 1)$. Bestäm också en ekvation för tangentplanet till $z = f(x, y)$ i punkten $(2, 0, f(2, 0))$.
2. Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = y^2, \quad x > 0, y > 0,$$

t.ex. genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = y. \end{cases}$$

Bestäm även den lösning som uppfyller att $f(x, x) = x^4$.

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D 2 \sin(x^2 + y^2) dx dy,$$

där $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.

4. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} y^2 x dx + (x^2 y + y e^y) dy,$$

där γ är parabeln $y = x^2$ från $(0, 0)$ till $(2, 4)$.

5. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = 2xy - x^2 y$ på triangelskivan med hörn i $(0, 0)$, $(0, 2)$ och $(2, 2)$.
6. Ytorna $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ avgränsar tre begränsade kroppar, varav två har samma volym V . Beräkna denna volym V .

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = (x + y)^2$ på kurvstycket

$$K : \frac{x^3}{4} + y^3 = 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

8. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{2-y}{x^2+(y-2)^2} dx + \frac{x}{x^2+(y-2)^2} dy,$$

där γ är den övre halvan av ellipsen $4x^2 + y^2 = 16$, från $(2, 0)$ till $(-2, 0)$.

9. Bestäm för vilka tal a som

$$f(x, y) = axy^2 + x^2 + y^2 - 2xy - 2ay - ax$$

har en lokal extrempunkt i $(1, 1)$.

10. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Avgör om f är kontinuerlig i origo. Avgör även om f är differentierbar i origo.

LYCKA TILL!