

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x e^{y-x} dx dy,$$

där D är triangelskivan med hörn i $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(1, 2)$.

2. Låt γ vara kurvan $y = \sin x$, från $(0, 0)$ till $(\pi, 0)$. Beräkna

a) $\int_{\gamma} (2y + 3) dx + (2 - \sin x) dy,$ (0.5)

b) $\int_{\gamma} (2xy + 3) dx + (x^2 - \sin y) dy.$ (0.5)

3. a) Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 4(xy^3 + x^3y), \quad x > 0, y > 0,$$

t.ex. genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = x^2 - y^2. \end{cases} \quad (0.6)$$

- b) Bestäm alla lösningar av formen $f(x, y) = g(xy)$ till den partiella differentialekvationen

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 4(xy^3 - x^3y), \quad x > 0, y > 0. \quad (0.4)$$

4. a) Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = xye^{y-x}$ på kvadraten

$$D = \{(x, y); |x| \leq 2, |y| \leq 2\}. \quad (0.7)$$

- b) Antar $f(x, y) = xye^{y-x}$ något största och/eller minsta värde på $D = \mathbb{R}^2$? Bestäm isåfall detta/dessa. (0.3)

Var god vänd!

5. Låt $f(x, y)$ vara en funktion sådan att $f'_x(5, -4) = 2$ och $f'_y(5, -4) = 1$.
- a) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(5, -4)$ i riktningen $(4, -3)$. (0.2)
 - b) Ange en riktning i vilken riktningsderivatan av f i punkten $(5, -4)$ är lika med 0. (0.2)
 - c) Tangentplanet π till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(5, -4, f(5, -4))$ går genom origo. Bestäm en ekvation för π . (0.3)
 - d) Kan kurvan $x^2 + 3xy + y^2 + 19 = 0$ vara en nivåkurva till f ? (0.3)
6. Låt K vara kroppen som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ och $z \geq -1$. Rita en skiss av K samt beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

LYCKA TILL!