**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**TENTAMENSSKRIVNING**
**FLERDIMENSIONELL ANALYS**
**2019–03–22 kl 8–13**

*Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.*

## Godkäntdel

*För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.*

**1.** Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 4$$

genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = x + \frac{1}{2}y^2, \\ v = y. \end{cases}$$

Bestäm också en lösning som uppfyller villkoret $f(x,0) = x$.

**2.** Låt $D$ vara triangelskivan med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,2)$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x(y+1)\,dxdy.$$

**3.** Bestäm största och minsta värde av funktionen

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$$

i området $x^2 + y^2 \leq 4$. Har $g$ ett lokalt extremvärde i punkten $(0,0)$?

**4.** Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma 2xe^{-y}\,dx + \frac{x(y+1)}{1+x^2}\,dy,$$

där $\gamma$ är parabelbågen $y = x^2$ från punkten $(-2,4)$ till $(1,1)$.

**5.** Planet $x + y + 3z = 11$ skär hyperboloiden $z^2 = x^2 + 2y^2 + 1$ och bildar kurvan $\sigma$.

a) Visa att punkten $P : (0,2,3)$ ligger på $\sigma$.

b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till hyperboloiden i punkten $P$.

c) Bestäm en ekvation (på parameterform) för tangenten till $\sigma$ i punkten $P$.

**6.** Låt $K$ vara den kropp som ges av olikheterna $z^2 \geq x^2 + y^2$ och $0 \leq z \leq 1$. Gör en enkel skiss av $K$ och beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\,dxdydz.$$

*Var god vänd!*

**Överbetygsdel**

*Om du klarat godkäntdelen har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.*

**7.** Ett rätblock har tre av dess sidor i koordinatplanen ($xy$-, $xz$- och $yz$-planet) och dessutom ett hörn i första oktanten (där $x > 0$, $y > 0$ och $z > 0$) på paraboloiden $z = 8 - 2x^2 - y^2$. Bestäm den största volym ett sådant rätblock kan ha. Utgör denna volym mer än en tredjedel av volymen av den kropp som paraboloiden tillsammans med koordinatplanen avgränsar i första oktanten?

**8.** a) Antag att $r > 1$ och $0 < \theta < 2\pi$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\sigma \frac{x\,dx}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},$$

där $\sigma$ är linjestycket $\sigma_1$ från $(1,0)$ till $(r,0)$ följt av cirkelbågen $\sigma_2$ med medelpunkt i origo som går från $(r,0)$ till $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ i positiv led.

b) Visa att differentialformen

$$\frac{x\,dx}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

är exakt i området $(x,y) \neq (0,0)$ och bestäm en potentialfunktion $U(x,y)$ med $U(1,0) = \pi/4$. Skissera även några nivåkurvor till $U$.

**9.** a) Antag att $u = u(x,t)$ och $v = v(x,t)$ har partiella derivator av godtycklig ordning samt att

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{och} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Visa att $u$ och $v$ löser vågekvationen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ med konstanten $c = 1$.

b) Kom ihåg att den allmänna lösningen till vågekvationen ges av

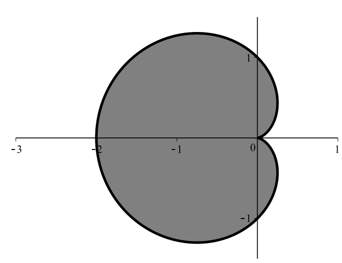
$$f(x,t) = G(x+ct) + H(x-ct),$$

där $G$, $H$ är godtyckliga två gånger deriverbara funktioner med kontinuerliga andraderivator. Bestäm den lösning $u = u(x,t)$ till vågekvationen som uppfyller villkoren

$$u(x,0) = 0 \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2xe^{-x^2} \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

**10.** Kardioidkurvan $\gamma$ ges av parametriseringen

$$\begin{cases} x = (1-\cos t)\cos t, \\ y = (1-\cos t)\sin t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$




Beräkna arean av det område som $\gamma$ innesluter.