

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Bestäm alla stationära punkter till  $f(x, y) = x^2 - x^2y + y^2$ . Ange även deras karaktär. (0.7)

b) Bestäm största och minsta värde av  $f(x, y) = x^2 - x^2y + y^2$  i det begränsade område som avgränsas av kurvorna  $y = x^2$  och  $y = 2$ . (0.3)

2. a) Låt  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ . Rita nivåkurvorna  $f(x, y) = C$ , för  $C = 1$  och  $C = 4$ . (0.2)

b) Beräkna

$$\iint_D x e^y dx dy,$$

där  $D$  är området som ges av olikheterna  $x^2 + 4y^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0$  och  $y \geq 0$ . (0.8)

3. Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(x^2 - y^2),$$

till exempel genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - y. \end{cases}$$

4. Låt  $K$  vara den kropp som ges av olikheterna  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ ,  $z \geq 1$  och  $y \geq 0$ . Beräkna volymen av  $K$ .

5. a) Definiera begreppet riktningsderivata för  $f(x, y)$  samt ange en formel för beräkning av denna. (0.2)

b) I vilken riktning har  $f(x, y)$  sin maximala tillväxthastighet och hur stor är denna. Bevisa dina påståenden. (0.4)

c) Låt  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  och låt  $D$  vara ringen  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ . Finns det någon punkt  $(a, b) \in D$  och någon riktning  $v$  så att  $f'_v(a, b) = \frac{2}{5}$ ? (Eventuella punkter och riktningar behöver ej anges.) (0.4)

6. Betrakta kurvintegralen

$$K(a, b) = \int_{\gamma} (ax + by)^3 dx + (ax + by)^3 dy,$$

där  $a, b$  är tal och  $\gamma$  är enhetscirkeln i  $xy$ -planet ett varv i positiv led. Vilka olika värden kan  $K(a, b)$  anta då  $a^2 + b^2 = 2$ ?

LYCKA TILL!