

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy,$$

där D är området som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 2$ och $y \geq |x|$.

2. Låt $f(x, y) = x^2y + xy^2 + 3x$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, -1, 3)$. (0.3)

b) I vilken riktning växer $f(x, y)$ snabbast i punkten $(1, -1)$, och hur stor är tillväxten i denna riktning? (0.2)

c) Bestäm alla lokala extrempunkter till f . (0.5)

3. a) Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = xy, \quad x > 0, y > 0,$$

exempelvis genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = y. \end{cases}$$

(0.5)

b) Bestäm alla lösningar på formen $f(x, y) = g(x^2y^2)$ till den partiella differentialekvationen

$$2x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2y^2}, \quad x > 0, y > 0.$$

(0.5)

4. Betrakta kurvintegralen

$$I = \int_{\gamma} y dx - x dy,$$

där γ är delen av parabeln $y = x^2 - 1$ från $(-1, 0)$ till $(0, -1)$.

a) Beräkna I genom att parametrisera γ . (0.3)

b) Beräkna, om det går, I med hjälp av potentialfunktion. Ge annars en motivering till varför det inte går. (0.3)

c) Beräkna I genom att på lämpligt sätt komplettera integrationsvägen och sedan använda Greens formel. (0.4)

Var god vänd!

5. Ett glas vars kupa har formen $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$, (enhet dm) är fyllt till en viss höjd med vatten. När glaset snurras (med konstant vinkelhastighet kring z -axeln) följer vattenytan $z = (1 + x^2 + y^2)/3$. Hur mycket vatten finns det i glaset, och till vilken höjd når det när glaset är i vila?

6. Låt $f(x, y) = e^{y^2-x}$.

a) Bestäm största och minsta värde för $f(x, y)$ på det kompakta området

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^3 \leq 1\}. \tag{0.5}$$

b) Har $f(x, y)$ något största och/eller minsta värde på det obegränsade området

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}?$$

Bestäm i så fall de punkter där största och/eller minsta värde antas. (0.5)

LYCKA TILL!