

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Bestäm alla stationära punkter till  $f(x, y) = x^2y - 4xy - y^2$ . Bestäm även alla lokala extrempunkter.

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{-(x^2+4y^2)} dx dy$$

över området  $D = \{x^2 + 4y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$ .

3. Låt  $\gamma$  vara parabeln  $y = 2 - x^2$  från  $(-1, 1)$  till  $(1, 1)$ .

a) Beräkna kurvintegralen  $\int_{\gamma} 2xy dx - x^2 dy$ . (0.5)

b) Beräkna kurvintegralen  $\int_{\gamma} (ye^{xy} + 2x) dx + xe^{xy} dy$ . (0.5)

4. Betrakta den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + f = 1, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Bestäm alla lösningar på formen

$$f(x, y) = g(r), \quad \text{där } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Bestäm även den lösning som dessutom uppfyller att  $f(x, y) = 2$  då  $r = 1$ .

5. Låt

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

a) Beräkna riktningsderivatan av  $f$  i punkten  $(1, \sqrt{2})$  i riktningen  $(1, -\sqrt{2})$ . (0.3)

b) Finns det någon riktning sådan att riktningsderivatan av  $f$  i punkten  $(1, \sqrt{2})$  blir  $\frac{10}{9}$ ? (0.3)

c) Har  $f(x, y)$  något gränsvärde då  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ ? Bestäm i så fall detta. (0.2)

d) Har  $f(x, y)$  något största och/eller minsta värde på området  $x^2 + y^2 \geq 1$ ? Bestäm i så fall dessa. (0.2)

Var god vänd!

6. Låt  $z = g(x, y)$  vara en ekvation för tangentplanet till ytan  $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$  i punkten  $(1, 2, 4)$ , och sätt  $h(x, y) = g(x, y) - f(x, y)$ . Bestäm alla värden på konstanten  $c$  sådana att volymen som begränsas av ytorna  $z = h(x, y)$  och  $z = c$  blir  $2\pi$ .

*LYCKA TILL!*