LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2018–03–16 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Visa att $g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ löser den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 2 \quad \text{då } (x, y) \neq (0, 0). \tag{0.5}$$

b) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x + y)^2 \, dxdy$, där D är området som ges av $x \geq y$ och $x^2 + y^2 \leq 1$. (0.5)

2. Ett företag producerar två typer av produkter. Dessa kallas X och Y. Vinsten genom att sälja x enheter av X och y enheter av Y ges av formeln

$$P(x, y) = 10x + 20y - \frac{x^2 + y^2}{10}.$$

Antag att det totala antalet producerade enheter inte får överstiga 100. Hur många av varje produkt ska företaget producera för att uppnå maximal vinst?

3. a) Beskriv nivåytorna $x^2 + (k - 1)y^2 - z = 0$ där $k = 0, 1, 2$. (0.3)

b) Bestäm det arbete som kraftfältet $\boldsymbol{F}(x, y) = (xy^2, xy)$ utför på en partikel som rör sig längs hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ från punkten $A : (\sqrt{2}, -1)$ till $B : (\sqrt{5}, 2)$. Med andra ord, beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma xy^2 \, dx + xy \, dy \tag{0.7}$$

där γ är hyperbelbågen som beskrivs ovan.

4. Beräkna volymen av den kropp som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z \leq 2$ och $2y^2 - z \leq 1$.

5. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & , \quad y \neq 0 \\ 0 & , \quad y = 0. \end{cases}$$

a) Bestäm grad $f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (\pi, 2)$. Bestäm också den maximala tillväxthastigheten för f i punkten $(\pi, 2)$. (0.4)

b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till f:s graf i punkten $(\pi, 2, f(\pi, 2))$. (0.2)

c) Bestäm $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Visa att f är differentierbar i punkten $(0, 0)$. (0.4)

Var god vänd!

6. a) Visa att differentialformen

$$\frac{2x}{y^2}\,dx - \frac{x^2+1-y}{y^3/2}\,dy$$

är exakt i området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ och bestäm den potentialfunktion $U : D \to \mathbb{R}$ som uppfyller $U(0, 1) = 0$. (0.4)

b) Bestäm eventuella stationära punkter till U i D. Visa att U har ett minsta värde på D och bestäm värdemängden till U. (0.4)

c) Bestäm en lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$xy - (x^2 + 1 - y)y' = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

som uppfyller villkoret $y(0) = 1/2$. (0.2)