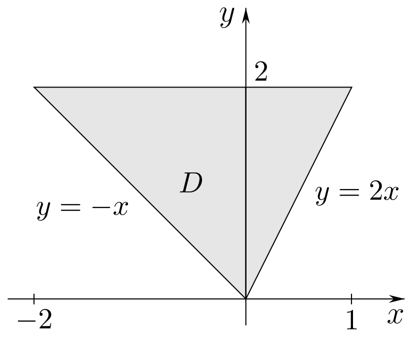
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2020–10–28 kl 14–19.30

1. För att kunna bestämma en primitiv integrerar vi först i x-led:



$$\iint_D e^{y^2}\,dxdy = \int_0^2 e^{y^2}\left(\int_{-y}^{y/2} 1\,dx\right)dy =$$
$$= \int_0^2 e^{y^2}\left(\tfrac{y}{2} - (-y)\right)dy =$$
$$= \int_0^2 \tfrac{3y}{2}e^{y^2}\,dy = \left[\tfrac{3}{4}e^{y^2}\right]_0^2 = \tfrac{3}{4}\left(e^4 - 1\right).$$

2. Kedjeregeln ger oss att

$$f'_x = g'\left(\tfrac{x}{y}\right)\tfrac{1}{y}, \qquad f'_y = g'\left(\tfrac{x}{y}\right)\left(-\tfrac{x}{y^2}\right),$$

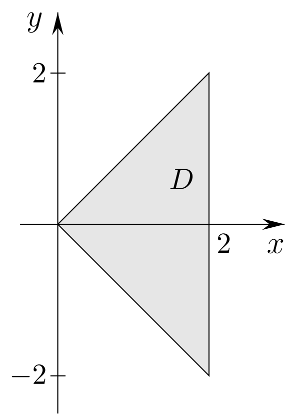
och insättning i ekvationen, med $t = x/y$, leder till

$$\tfrac{x}{y}g'\left(\tfrac{x}{y}\right) + \tfrac{x}{y}g'\left(\tfrac{x}{y}\right) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad g'\left(\tfrac{x}{y}\right) = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{x/y} \qquad \Leftrightarrow \qquad g'(t) = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{t}.$$

Bestämmer vi nu primitiver får vi $g(t) = \frac{1}{2}\ln t + C$, där C är en godtycklig konstant, så de sökta lösningarna är $f(x, y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{y}\right) + C$.

3. Funktionen är kontinuerlig och området D är kompakt, så funktionen har både ett största och minsta värde på D. Vi tar fram intressanta punkter, och börjar med (inre) stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = y(y-1) = 0, \\ f'_y = 2xy - x + 1 = 0. \end{cases}$$



Delar vi upp den första ekvationen i fallen $y = 0$ och $y = 1$, och kombinerar med den andra, får vi den enda stationära punkten $(1, 0)$ och funktionsvärdet $f(1, 0) = 0$. (Notera att punkten $(-1, 1)$ ligger utanför D.)

Vi övergår sedan till att studera funktionen f på randen (exklusive hörn):

- <u>$y = x$</u>: Funktionen blir $g_1(t) = f(t, t) = t^3 - t^2 + t$, $0 \le t \le 2$, med derivatan $g_1'(t) = 3t^2 - 2t + 1$. Denna derivata saknar reella nollställen och därför saknas här intressanta punkter.

- $\underline{y=-x}$: Vi får $g_2(t) = f(t,-t) = t^3 + t^2 - t$, $0 \le t \le 2$, med derivatan $g_2'(t) = 3t^2 + 2t - 1$. Derivatan har nollställena $1/3$ och -1 (utanför intervallet), vilket ger den enda intressanta punkten $(1/3, -1/3)$ med $f\big(1/3, -1/3\big) = -5/27$.

- $\underline{x=2}$: Här studerar vi $g_3(t) = f(2,t) = 2t^2 - t$, $-2 \le t \le 2$. Derivatan blir $g_3'(t) = 4t - 1$ med nollstället $t = 1/4$ (i intervallet). Vi får den intressanta punkten $(2, 1/4)$ med funktionsvärdet $f(2, 1/4) = -1/8$.

Slutligen beräknas funktionsvärdena i hörnen: $f(0,0) = 0$, $f(2,2) = 6$ och $f(2,-2) = 10$. En jämförelse av funktionsvärdena ovan ger att f har största värde 10 och minsta värde $-5/27$.

4. Kurvintegralen kan beräknas direkt genom att parametrisera kurvstycket via

$$(x,y) = (\cos t, \sin t), \qquad t : 0 \to \pi/2.$$

Vi får

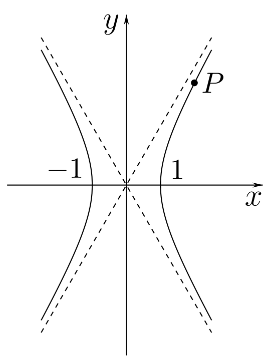
$$\int_\gamma y\,dx + (x+1)\,dy = \int_0^{\pi/2} (\sin t(-\sin t) + (\cos t + 1)\cos t)\; dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \big(\cos^2 t - \sin^2 t + \cos t\big)\; dt = \int_0^{\pi/2} (\cos 2t + \cos t)\; dt =$$

$$= \Big[\, \tfrac{1}{2}\sin 2t + \sin t \,\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

Alternativ: Eftersom detta fält är ett potentialfält kan man förenkla räkningarna genom att först byta integrationsväg. Det går också bra att först bestämma potentialfunktionen och sedan lösa uppgiften med hjälp av denna.

5. Vi söker först den nivåkurva $x^2 - y^2/3 = C$ som innehåller punkten $P : (2,3)$. Insättning av punktens koordinater ger att $C = 1$, så kurvan vi söker är hyperbeln i figuren. Denna skär x-axeln i punkterna $(\pm 1, 0)$ och har asymptoterna $y = \pm\sqrt{3}x$.



För att insekten skall värma sig så snabbt som möjligt vill vi hitta den riktning för vilken riktningsderivatan av T i punkten P blir maximal. Denna ges av gradienten av T i punkten P. Vi får $\operatorname{grad} T = \big(2x, -\frac{2}{3}y\big)$, vilket ger $(\operatorname{grad} T)(2,3) = (4,-2) = 2(2,-1)$. Den sökta riktningen är alltså $(2,-1)$.

Den sökta punkten Q är ett lokalt maximum till T. För möjliga kandidater till ett lokalt max sätter vi $\operatorname{grad} T = (0,0)$, och får ut den enda stationära punkten $(0,0)$, dvs. origo. Det återstår nu att kontrollera vilken typ av punkt vi har i origo. Eftersom uttrycket för T redan råkar vara en kvadratisk form kan vi direkt studera denna, och då den är indefinit följer det att origo är en sadelpunkt. Det finns alltså ingen sådan punkt Q.

6. Ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ är en upp-och-nervänd paraboloid med vertex i $(0, 0, 4)$, medan $z = 3y^2$ är en parabolisk cylinder. I den sökta kroppen kommer paraboloiden att ligga över cylindern, och vi undersöker därför olikheten

$$4 - x^2 - y^2 \geq 3y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + 4y^2 \leq 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x^2}{2^2} + y^2 \leq 1,$$

vilket i xy-planet svarar mot den elliptiska skivan med medelpunkt origo och halvaxlarna 2 respektive 1, nedan betecknad D.

Nu kan vi beräkna volymen:

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D ((4 - x^2 - y^2) - 3y^2)\,dxdy = \iint_D (4 - x^2 - 4y^2)\,dxdy = \\
&= \left[\begin{cases} x = 2r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad E : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases} \quad \left|\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)}\right| = 2r \right] = \\
&= \iint_E 2r(4 - 4r^2)\,drd\varphi = 16\pi \int_0^1 (r - r^3)\,dr = 16\pi \left[\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right]_0^1 = 4\pi.
\end{aligned}$$

7. För att ta fram tangentplanet till ellipsoiden $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ i punkten $(2, 2, \sqrt{2})$, beräknar vi först gradienten av g i punkten. Vi får $\operatorname{grad} g = (2x, 2y, 8z)$, vilket ger $(\operatorname{grad} g)(2, 2, \sqrt{2}) = (4, 4, 8\sqrt{2}) = 4(1, 1, 2\sqrt{2})$. Då vi vet att gradienten är en normalvektor till tangentplanet ges en ekvation för den senare av

$$1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 2) + 2\sqrt{2} \cdot (z - \sqrt{2}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x + y + 2\sqrt{2}z - 8 = 0.$$

Vi upprepar nu proceduren ovan, men tar fram tangentplanet i en godtycklig punkt (a, b, c) på ytan. Eftersom $(\operatorname{grad} g)(a, b, c) = 2(a, b, 4c)$, blir planets ekvation

$$a(x - a) + b(y - b) + 4c(z - c) = 0 \;\Leftrightarrow\; ax + by + 4cz - (a^2 + b^2 + 4c^2) = 0.$$

Eftersom punkten (a, b, c) ligger på ytan, och därmed uppfyller att $a^2 + b^2 + 4c^2 = 16$, kan planets ekvation skrivas

$$ax + by + 4cz - 16 = 0.$$

Nu lägger vi slutligen till det extra villkoret att $(0, 0, 4)$ ligger i tangentplanet. Insättning i planets ekvation ger $16c - 16 = 0$, dvs. vi får $c = 1$, och insättning i ytans ekvation ger att $a^2 + b^2 + 4 = 16$, dvs. $a^2 + b^2 = 12$.

Sammantaget ser vi alltså att den sökta mängden punkter utgörs av den cirkel i planet $z = 1$ som har radie $\sqrt{12}$ och medelpunkt $(0, 0, 1)$.

8. Funktionen f är kontinuerlig och mängden $K : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ (enhetsklotet) är kompakt så både största och minsta värde existerar.

Vi börjar med att söka stationära punkter i det inre av K, och $\operatorname{grad} f = (z, 2y, x) = (0, 0, 0)$ ger den enda stationära punkten $(0, 0, 0)$, dvs. origo (som ligger i K). Funktionsvärdet är $f(0, 0, 0) = 0$.

Nästa steg är att studera f på randen av K, dvs. på enhetssfären $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, och vi använder då Lagranges multiplikatormetod (optimering med bivillkor). Intressanta punkter har vi då $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ eller $\operatorname{grad} g = \mathbf{0}$, där vi direkt kan bortse från det sista fallet, då den enda punkt som uppfyller $\operatorname{grad} g = \mathbf{0}$ är origo, som ej är på sfären. Det återstår alltså att studera likheten $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$:

$$\begin{cases} z = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ x = 2\lambda z \end{cases}.$$

Vi faktoriserar nu den andra ekvationen, $2y = 2\lambda y \Leftrightarrow 2(\lambda - 1)y = 0$, och delar upp i fall. Första fallet är $\lambda = 1$, och insättning i de andra två ekvationerna ger att $z = 2x$ och $x = 2z$ vilket leder till att $x = z = 0$. Insättning av $x = z = 0$ i ekvationen för sfären ger $y = \pm 1$, så intressanta punkter är $(0, 0, \pm 1)$ med funktionsvärde $f(0, 0, \pm 1) = 1$.

Det andra fallet ges av $y = 0$, och vi fortsätter då att studera de återstående två ekvationerna:

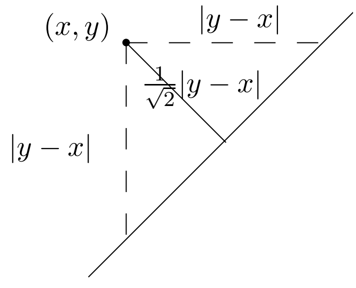
$$\begin{cases} z = 2\lambda x \\ x = 2\lambda z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda x - z = 0 \\ x - 2\lambda z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda x - z = 0 \\ (1 - 4\lambda^2)x = 0. \end{cases}$$

I den sista ekvationen skall det alltså gälla att $1 - 4\lambda^2 = 0$ eller $x = 0$. Det sistnämnda fallet kan vi bortse ifrån, då det leder till punkten $(0, 0, 0)$ som ej ligger på sfären. I det förstnämnda fallet får vi $\lambda = \pm 1/2$, vilket efter insättning i systemet leder till att $x = z$ eller $x = -z$. Insättning i ekvationen för vår sfär ger de fyra intressanta punkterna $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, 0, \pm 1)$ med funktionsvärdena $f\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\big) = f\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = 1/2$ respektive $f\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = f\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\big) = -1/2$.

Slutligen ger en jämförelse av samtliga beräknade funktionsvärden ovan att största värde är 1 och minsta värde är $-1/2$.

9. Med t.ex. ett geometriskt resonemang (se figur), kan vi komma fram till att avståndet $f(x, y)$ från en punkt (x, y) till linjen $y = x$ ges av $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}|y - x|$, så för att beräkna medelavståndet M behöver vi beräkna integralen

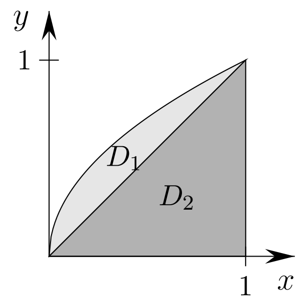
$$M = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D \frac{1}{\sqrt{2}}|y - x| \, dxdy = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}\mu(D)} \underbrace{\iint_D |y - x| \, dxdy}_{=I},$$



där $\mu(D)$ är arean av området D.

Vi koncentrerar oss först på dubbelintegralen I. Eftersom vi har ett absolutbelopp i integranden får vi dela upp denna enligt

$$I = \underbrace{\iint_{D_1} (y-x)\,dxdy}_{=I_1} + \underbrace{\iint_{D_2} (x-y)\,dxdy}_{=I_2},$$



där D_1 och D_2 är områdena i figuren. Vi får nu

$$I_1 = \iint_{D_1} (y-x)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (y-x)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2 - xy \right]_x^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x^2 - x^{3/2} \right) dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{2}{5}x^{5/2} \right]_0^1 = \tfrac{1}{60},$$

samt

$$I_2 = \iint_{D_2} (x-y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x (x-y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy - \tfrac{1}{2}y^2 \right]_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 \tfrac{1}{2}x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = \tfrac{1}{6},$$

vilket ger $I = I_1 + I_2 = 11/60$.

Arean $\mu(D)$ får vi sedan direkt med en enkelintegral:

$$\mu(D) = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^1 = \tfrac{2}{3}.$$

Sammantaget blir alltså vårt medelavstånd lika med $M = \frac{1}{\sqrt{2}\mu(D)} I = \frac{11}{40\sqrt{2}}$.