LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Flerdimensionell analys
2017-06-03, Lösningar

1. a) Gradienten av f är grad $f(x, y) = (e^y, xe^y)$, och för punkten $P_2 : (1, 0)$ får vi grad $f(1, 0) = (1, 1)$. Vi beräknar en riktningsvektor $\overline{P_2P_3} = (-1, 1)$, och normerar den till $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$. Riktningsderivatan av f i riktningen $\mathbf{v}$ i punkten $(1, 0)$ blir nu

$$f'_{\mathbf{v}}(1, 0) = \operatorname{grad} f(1, 0) \cdot \mathbf{v} = (1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = \underline{0}.$$

b) Vi kan beskriva området med olikheterna $D : 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le x \le 1$, vilket ger

$$\iint_D xe^y dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xe^y\, dy \right) dx = \int_0^1 [xe^y]_0^{1-x}\, dx = \int_0^1 \left(xe^{1-x} - xe^0 \right) dx =$$
$$= \int_0^1 xe^{1-x}\, dx - \int_0^1 x\, dx = \left[-xe^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x}\, dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$$
$$= -e^0 - \left[e^{1-x} \right]_0^1 - \tfrac{1}{2} = -1 - (e^0 - e^1) - \tfrac{1}{2} = \underline{e - \tfrac{5}{2}}.$$

2. a) För att hitta stationära punkter löser vi systemet

$$\begin{cases} f'_x = 6x - 3y^2 = 3(2x - y^2) = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 6xy = 3y(y - 2x) = 0 \end{cases}.$$

Andra ekvationen ger $y = 0$ eller $y = 2x$. Alternativet $y = 0$ ger i första ekvationen $x = 0$, och alltså punkten $(0, 0)$. Alternativet $y = 2x$ ger $y^2 = y$, dvs. $y = 0$ eller $y = 1$, och således punkterna $(0, 0)$ respektive $(\frac{1}{2}, 1)$.

För den kvadratiska formen beräknar vi

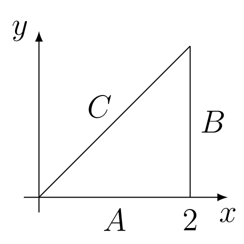
$$f''_{xx} = 6, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = -6y, \quad f''_{yy} = 6y - 6x.$$

För punkten $(0, 0)$ får vi $Q(h, k) = 6h^2$, som är positivt semidefinit. För punkten $(\frac{1}{2}, 1)$ blir

$$Q(h, k) = 6h^2 + 2 \cdot (-6)hk + 3k^2 = 3(k^3 - 4hk + 2h^2) = 3((k - 2h)^2 - 2h^2),$$

som är indefinit. Sammanfattningsvis har vi alltså två stationära punkter: $\underline{(0, 0)}$ med positivt semidefinit kvadratisk form, samt $\underline{(\frac{1}{2}, 1)}$ med indefinit kvadratisk form.

b) Den stationära punkten $(0, 0)$ är ett av hörnen till vårt område, och $(\frac{1}{2}, 1)$ ligger utanför. Vi parametriserar randen:



- $A : y = 0, 0 \le x \le 2$. Vi får $f(x, 0) = 3x^2 = g_1(x)$, och $g'_1(x) = 6x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$, vilket svarar mot hörnet $(0, 0)$.

- $B : x = 2, 0 \le y \le 2$. Vi får $f(2, y) = 12 + y^3 - 6y^2 = g_2(x)$, och $g'_2(x) = 3y^2 - 12y = 3y(y - 4) = 0$. Lösningen $y = 0$ svarar mot hörnet $(2, 0)$, och $y = 4$ ligger utanför vårt intervall.

- $C : y = x, 0 \le x \le 2$. Vi får $f(x, x) = 3x^2 - 2x^3 = g_3(x)$, och $g'_3(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x) = 0$. Lösningen $x = 0$ svarar mot hörnet $(0, 0)$, och $x = 1$ ger värdet $g'_3(1) = \underline{1}$.

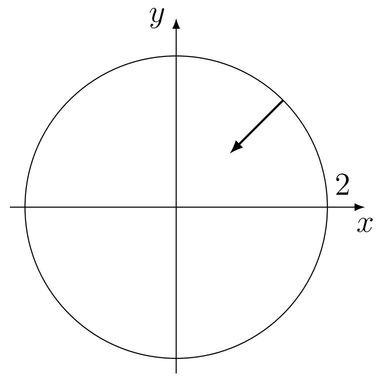
Vi beräknar nu värdena i hörnen:

$$f(0, 0) = \underline{0}, \quad f(2, 0) = \underline{12}, \quad f(2, 2) = \underline{-4}.$$

Efter en jämförelse får vi alltså slutligen största värde 12 och minsta värde -4.

3. a) Vi beräknar $f(\sqrt{3}, 1) = 3 - \frac{1}{4}(3+1) = 2$, så vi söker alltså nivåkurvan $f(x,y) = 2$:

$$3 - \tfrac{1}{4}(x^2+y^2) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}(x^2+y^2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = 1.$$



Vi får alltså en cirkel med radie 2. Gradienten är vinkelrät mot denna kurva, och eftersom f växer inåt mot origo pekar den inåt.

b) Vi skall optimera f under bivillkoret $g(x,y) = x^4 + y^4 = 1$, och beräknar därför

$$\operatorname{grad} f = (-\tfrac{1}{2}x, -\tfrac{1}{2}y) \quad \text{och} \quad \operatorname{grad} h = (4x^3, 4y^3).$$

Dessa gradienter är parallella då

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}x & 4x^3 \\ -\frac{1}{2}y & 4y^3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2xy^3 + 2x^3y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy(x^2-y^2) = 0,$$

vilket gäller då $x = 0$, $y = 0$ eller $y = \pm x$. Insatt i bivillkoret $x^4+y^4 = 1$ ger detta $y = \pm 1$, $x = \pm 1$ respektive

$$x^4 + (\pm x)^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2^{-1/4},$$

dvs. punkterna $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4})$ (totalt 8 stycken). Dessa ger värdena

$$f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 3 - \tfrac{1}{4} \cdot 1 = \tfrac{11}{4}, \quad f(\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}) = 3 - \tfrac{1}{4}(2^{-1/2} + 2^{-1/2}) = 3 - \tfrac{\sqrt{2}}{4}.$$

Eftersom $\frac{\sqrt{2}}{4} > 1$ får vi slutligen $\underline{\text{största värde } \frac{11}{4}}$ och $\underline{\text{minsta värde } 3 - \frac{\sqrt{2}}{4}}$.

4. a) Vi kan parametrisera γ enligt $(x(t), y(t)) = (\cos t, 2\sin t)$, $t : 0 \to \pi$, så

$$\int_\gamma x^2\,dx - y\,dy = \int_0^\pi \big(\cos^2 t(-\sin t) - 2\sin t\, 2\cos t\big)\,dt =$$
$$= \left[\frac{\cos^3 t}{3} - 2\sin^2 t\right]_0^\pi = -\tfrac{1}{3} - 0 - (\tfrac{1}{3} - 0) = \underline{-\tfrac{2}{3}}.$$

b) Vektorfältet är ett potentialfält med potentialfunktion $U(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2}$ (kolla!), så vi får

$$\int_\gamma x^2\,dx - y\,dy = U(-1,0) - U(1,0) = -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} = \underline{-\tfrac{2}{3}}.$$

c) Eftersom vi har ett potentialfält gäller det att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial Q}$ (vilket också ses genom en direkt uträkning). Om vi kompletterar integrationsvägen med det räta linjestycket γ_1 från $(-1,0)$ till $(1,0)$ får vi därför

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial Q}\right) dxdy = \iint_D 0\,dxdy = 0,$$

där D är området som omsluts av de båda kurvorna. Det gäller alltså att

$$\int_\gamma x^2\,dx - y\,dy = -\int_{\gamma_1} x^2\,dx - y\,dy = -\int_{-1}^1 t^2\,dt = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^1 = -\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\right) = \underline{-\tfrac{2}{3}},$$

där vi parametriserat γ_1 enligt $(x(t), y(t)) = (t, 0)$, $t : -1 \to 1$.

5. a) Vi byter variabler med det föreslagna variabelbytet. Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

De andraderivator vi behöver i ekvationen blir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial f}{\partial u}\right) = y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}.$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial u} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.$$

Vi sätter in dessa derivator i differentialekvationen, och får efter förenkling

$$-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{y^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{v^2} \tag{1}$$

Vi löser nu denna ekvation:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = -\frac{1}{v^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{v} + g(u) \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{u}{v} + G(u) + h(v),$$

där g och h är funktioner av en variabel, och G en primitiv till g. Återgång till variablerna x, y ger slutligen

$$\underline{f(x,y)} = \frac{xy}{y} + G(xy) + h(y) = \underline{x + G(xy) + h(y)}.$$

b) Detta är samma ekvation som i a), förutom att vi har noll i högerledet. Med samma beräkningar leder (1) därför nu istället till

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial u} = g(u) \quad \Leftrightarrow \quad f = G(u) + h(v),$$

dvs. $f(x,y) = G(xy) + h(y)$. Sätter vi här $h = 0$ så ser vi att alla sammansättningar på formen $f(x,y) = g(xy)$ löser ekvationen.

Ett alternativ är att från början derivera $f(x,y) = g(xy)$ med hjälp av kedjeregeln för att få fram aktuella derivator, och kolla så att differentialekvationen är uppfylld med dessa.

6. a) Vi väljer att "dela upp" hyperboloiden i skivor parallella med xy-planet. Eftersom

$$x^2 + \tfrac{1}{4}y^2 - z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \tfrac{1}{4}y^2 = 1 + z^2,$$

blir varje sådan skiva D_z, för $0 \le z \le 2$, en ellips med halvaxlarna $\sqrt{1+z^2}$ och $2\sqrt{1+z^2}$, så dess area blir $\pi \cdot \sqrt{1+z^2} \cdot 2\sqrt{1+z^2} = 2\pi(1+z^2)$. Vi får däför volymen V till

$$V = \iiint_K 1\,dxdydz = \int_0^2 \underbrace{\left(\iint_{D_z} 1\,dxdy\right)}_{\text{arean av } D_z} dz = \int_0^2 2\pi(1+z^2)\,dz =$$

$$= 2\pi\left[z + \frac{z^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi(2 + \tfrac{8}{3}) = \underline{\frac{28\pi}{3}}.$$

Ett alternativ är att först integrera i z-led från exempelvis $z = 0$ till $z = \sqrt{1 + x^2 + \frac{1}{4}y^2}$, och sedan över området $D : 1 \le x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le 5$ i xy-planet. Den volym man då får skall sedan subtraheras från volymen av cylindern med bottenyta $x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le 5$ och höjd 2.

b) Vi söker först en ekvation för tangentplanet till ytan $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z^2 = 1$ i en godtycklig punkt (a, b, c). Gradienten av f är grad $f(x, y, z) = (2x, y/2, -2z)$, speciellt får vi grad $f(a, b, c) = (2a, b/2, -2c)$, så vi kan välja $(4a, b, -4c)$ som normalvektor. Detta ger ekvationen

$$\begin{aligned} 4a(x-a) + b(y-b) + (-4c)(z-c) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4ax + by - 4cz - (\underbrace{4a^2 + b^2 - 4c^2}_{4}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4ax + by - 4cz - 4 = 0, \end{aligned}$$

där vi använt att punkten (a, b, c) uppfyller hyperboloidens ekvation. Detta plan går genom $(1, 4, 2)$ precis då

$$4a \cdot 1 + b \cdot 4 - 4c \cdot 2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + b - 2c - 1 = 0.$$

Alla punkter (a, b, c) på H, i vilka tangentplanet till H går genom $(1, 4, 2)$, uppfyller alltså denna ekvation, så vi ser slutligen att alla sådana punkter ligger i planet med ekvation $\underline{x + y - 2z - 1 = 0}$.