LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Flerdimensionell analys
2016-10-28, Lösningar

1. Det är lämpligt att beskriva området D med polära kooordinater enligt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \qquad E : \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}.$$

Funktionaldeterminanten blir som vanlig r, så vi får

$$\iint_D xye^{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \iint_E r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, e^{r^4}\cdot r\,drd\varphi =$$

$$= \int_0^2 r^3e^{r^4}dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \left[\frac{e^{r^4}}{4}\right]_0^2 \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{e^{16}}{4} - \frac{e^0}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2}\right) = \underline{\frac{e^{16}-1}{16}}.$$

2. a) För att hitta stationära punkter löser vi systemet

$$\begin{cases} f'_x = (y-1)e^{x^2-y}\cdot 2x = 2x(y-1)e^{x^2-y} = 0 \\ f'_y = 1\cdot e^{x^2-y} + (y-1)e^{x^2-y}\cdot(-1) = (2-y)e^{x^2-y} = 0 \end{cases}.$$

Första ekvationen ger $x = 0$ eller $y = 1$, och den andra $y = 2$. Den enda stationära punkten är alltså $(0, 2)$.

För den kvadratiska formen beräknar vi

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 2(y-1)e^{x^2-y} + 2x(y-1)e^{x^2-y}\cdot 2x = 2(y-1)(1+2x^2)e^{x^2-y}, \\ f''_{xy} &= f''_{yx} = (2-y)e^{x^2-y}\cdot 2x = 2x(2-y)e^{x^2-y}, \\ f''_{yy} &= -1\cdot e^{x^2-y} + (2-y)e^{x^2-y}\cdot(-1) = (y-3)e^{x^2-y}. \end{aligned}$$

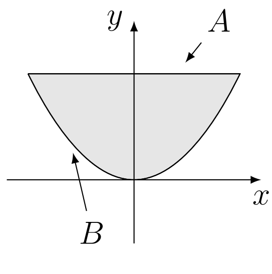
För punkten $(0, 2)$ får vi

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= f''_{xx}(0,2)\,h^2 + 2f''_{xy}(0,2)\,hk + f''_{yy}(0,2)\,k^2 = \\ &= 2e^{-2}h^2 + 2\cdot 0\,hk - e^{-2}k^2 = e^{-2}(2h^2 - k^2), \end{aligned}$$

som är indefinit, så f har en sadelpunkt i $(0, 2)$.

Det finns alltså en <u>stationär punkt $(0, 2)$</u>, men <u>ingen extrempunkt</u>.

b) Den stationära punkten $(0, 2)$ ligger utanför vårt område. Vi parametriserar randen:



- $A : y = 1, -1 \le x \le 1$. Vi får $f(x, 1) = (1-1)e^{x^2-1} = \underline{0}$.
- $B : y = x^2, -1 \le x \le 1$. Vi får $f(x, x^2) = (x^2-1)e^{x^2-x^2} = x^2 - 1 = g(x)$, och $g'(x) = 2x = 0 \iff x = 0$. Detta ger värdet $g(0) = \underline{-1}$, och intervallets ändpunkter har vi fått med ovan då vi studerade A.

Efter en jämförelse får vi alltså slutligen <u>största värde 0</u> och <u>minsta värde -1</u>.

3. a) Vi kan parametrisera γ enligt $(x(t), y(t)) = (t, t^2+1)$, $t : -1 \to 1$, så

$$\int_\gamma 1\,dx + 2y\,dy = \int_{-1}^{1} \big(1 \cdot 1 + 2(t^2+1) \cdot 2t\big)dt = \int_{-1}^{1} \big(4t^3 + 4t + 1\big)dt =$$
$$= \big[t^4 + 2t^2 + t\big]_{-1}^{1} = 1 + 2 + 1 - (1 + 2 - 1) = \underline{2}.$$

b) Vektorfältet är ett potentialfält med potential $U(x, y) = \ln(y^2 + x)$ (kolla!), så vi får

$$\int_\gamma \frac{1}{y^2+x}\,dx + \frac{2y}{y^2+x}\,dy = U(1,2) - U(-1,2) = \ln 5 - \ln 3 = \underline{\ln \tfrac{5}{3}}.$$

Ett alternativ är att använda Greens formel och byta väg till exempelvis linjestycket från $(-1, 2)$ till $(1, 2)$.

4. a) Gradienten av f är

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = (2x, 4y, 8z),$$

och för punkten $(1, -2, 1)$ får vi $\operatorname{grad} f(1, -2, 1) = (2, -8, 8)$. Den givna riktningsvektorn har längd $\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$, så normering ger $\mathbf{v} = \frac{1}{3}(2, -1, -2)$. Riktningsderivatan av f i riktningen $\mathbf{v}$ i punkten $(1, -2, 1)$ blir nu

$$f'_{\mathbf{v}}(1, -2, 1) = \operatorname{grad} f(1, -2, 1) \bullet \mathbf{v} = (2, -8, 8) \bullet \tfrac{1}{3}(2, -1, -2) = \tfrac{1}{3}(4 + 8 - 16) = \underline{-\tfrac{4}{3}}.$$

b) Ellipsoiden har ekvation $f(x, y, z) = 13$, med f från a)-uppgiften. Som normalvektor till tangentplanet kan vi välja $\operatorname{grad} f(1, -2, 1) = (2, -8, 8)$, eller vektorn $(1, -4, 4)$ i samma riktning. Tangentplanet får då ekvation

$$1(x - 1) + (-4)(y - (-2)) + 4(z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x - 4y + 4z - 13 = 0}.$$

c) Normalvektorn $(1, 2, -1)$ till det givna planet skall vara pararallell med $\operatorname{grad} f(x, y, z)$ ovan, eller med $\frac{1}{2}\operatorname{grad} f(x, y, z)$ vilket ger

$$(x, 2y, 4z) = k(1, 2, -1) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = \big(k, k, -\tfrac{k}{4}\big).$$

Insatt i ellipsoidens ekvation får vi nu

$$k^2 + 2k^2 + 4\tfrac{k^2}{16} = 13 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{4+8+1}{4}k^2 = 13 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm 2,$$

vilket ger punkterna $(2, 2, -\frac{1}{2})$ och $(-2, -2, \frac{1}{2})$, och slutligen

$$C = 2 + 2 \cdot 2 - (-\tfrac{1}{2}) = \underline{\tfrac{13}{2}} \quad \text{respektive} \quad C = -2 + 2 \cdot (-2) - \tfrac{1}{2} = \underline{-\tfrac{13}{2}}.$$

5. Vi byter variabler med det föreslagna variabelbytet. Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot e^x = e^x\frac{\partial f}{\partial v}.$$

De andraderivator vi behöver i ekvationen blir

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\frac{\partial f}{\partial v}\right) = e^x\frac{\partial f}{\partial v} + e^x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \\ &= e^x\frac{\partial f}{\partial v} + e^x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot ye^x\right) = e^x\frac{\partial f}{\partial v} + e^x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + ye^{2x}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\frac{\partial f}{\partial v}\right) = e^x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \\ &= e^x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 0 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot e^x\right) = e^{2x}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\end{aligned}$$

Vi sätter in dessa i differentialekvationen, och får efter förenkling

$$e^x\frac{\partial f}{\partial v} + e^x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \tag{1}$$

Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen med avseende på u av funktionen $\frac{\partial f}{\partial v}$. En integrerande faktor är e^u, och genom multiplikation med denna får vi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(e^u\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^u\frac{\partial f}{\partial v} = g(v) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial v} = e^{-u}g(v),$$

där g är en funktion av en variabel. Löser vi nu denna sista ekvation får vi

$$\frac{\partial f}{\partial v} = e^{-u}g(v) \quad\Leftrightarrow\quad f = e^{-u}G(v) + h(u),$$

Där G är en primitiv till g, och h ytterligare en funktion av en variabel. Återgång till variablerna x, y ger slutligen

$$\underline{f(x,y) = e^{-x}G(ye^x) + h(x).}$$

Ett alternativ är att istället först integrera den andra ekvationen i (1) med avseende på v:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial u} + f = \varphi(u).$$

Metoden med integrerande faktor ger sedan

$$\frac{\partial f}{\partial u} + f = \varphi(u) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial u}\big(e^u f\big) = e^u\varphi(u).$$

Här inför vi lämpligen den nya (godtyckliga) funktionen $\phi(u) = e^u\varphi(u)$ innan vi fortsätter:

$$\frac{\partial}{\partial u}\big(e^u f\big) = \phi(u) \quad\Leftrightarrow\quad e^u f = \Phi(u) + \psi(v) \quad\Leftrightarrow\quad f = e^{-u}\Phi(u) + e^{-u}\psi(v).$$

Återgång till variablerna x, y ger

$$\underline{f(x,y) = e^{-x}\Phi(x) + e^{-x}\psi(ye^x).}$$

(Det gäller alltså här, om vi jämför med svaret ovan, att $\psi(ye^x) = G(ye^x)$ och $e^{-x}\Phi(x) = h(x)$.)

6. a) Kvadratkomplettering ger

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 2x + 2z + 30 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + 2y^2 + (z-1)^2 = 32.$$

När vi söker volymen V av kroppen K som begränsas av E kan vi strunta i förskjutningen i x- och z-led, och använda de rymdellipspolära koordinaterna

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \qquad L: \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}.$$

Funktionaldeterminanten blir $\frac{1}{\sqrt{2}} r^2 \sin\theta$, och vi får

$$V = \iiint_K 1\, dxdydz = \iiint_L \frac{1}{\sqrt{2}} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi \int_0^{4\sqrt{2}} r^2\, dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi \cdot \frac{(4\sqrt{2})^3}{3} \cdot 2 = \frac{2\pi \cdot 128\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 3} = \underline{\frac{512\pi}{3}}.$$

Känner man till formeln för volymen av en ellipsoid kan man alternativ observera att denna har halvaxlarna $4\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} 4\sqrt{2} = 4$ och $4\sqrt{2}$, vilket ger volymen

$$V = \frac{4\pi \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2}}{3} = \underline{\frac{512\pi}{3}}.$$

b) Avståndet från en punkt (x, y, z) till origo ges av $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, men vi väljer att istället hitta största och minsta värde av

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{under bivillkoret} \quad g(x,y,z) = (x-1)^2 + 2y^2 + (z-1)^2 = 32.$$

Bivillkoret är kompakt och saknar rand, så aktuella punkter hittar vi där

$$\operatorname{grad} f = (2x, 2y, 2z) \quad \text{och} \quad \operatorname{grad} g = (2x-2, 4y, 2z-2)$$

är parallella. Med istället $\frac{1}{2} \operatorname{grad} f$ och $\frac{1}{2} \operatorname{grad} g$ leder detta till systemet

$$\begin{cases} x - 1 &= \lambda x \quad (1) \\ 2y &= \lambda y \quad (2) \\ z - 1 &= \lambda z \quad (3) \end{cases}.$$

Ekvation (2) ger $\lambda = 2$ eller $y = 0$. Med $\lambda = 2$ kan vi tillsammans med bivillkoret lösa ut de två punkterna

$$(-1, \pm\sqrt{12}, -1), \quad \text{vilka ger värdet} \quad f(-1, \pm\sqrt{12}, -1) = \underline{14}.$$

För $y = 0$ ger ekvation (1) och (3) tillsammans med bivillkoret punkterna $(-3, 0, -3)$ och $(5, 0, 5)$, och värdena

$$f(-3, 0, -3) = \underline{18} \quad \text{respektive} \quad f(5, 0, 5) = \underline{50}.$$

Fallet $\operatorname{grad} f = (0, 0, 0)$ ger inga punkter som uppfyller bivillkoret, så största värdet av f är alltså 50, och det minsta 14. Slutligen får vi alltså:

Största avståndet är $\sqrt{50} = \underline{5\sqrt{2}}$, och det minsta är $\underline{\sqrt{14}}$.