LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Flerdimensionell analys
2016-06-04, Lösningar

1. a) För att hitta stationära punkter löser vi systemet

$$\begin{cases} f'_x &= 2x - 2y - 2 = 0 \\ f'_y &= -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y &= 0 \\ 2y &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2 \\ y &= 1 \end{cases}.$$

För den kvadratiska formen beräknar vi

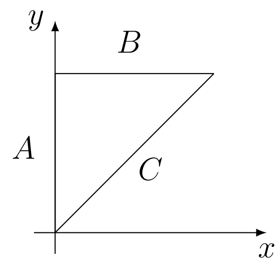
$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{yy} = 4 \quad \text{och} \quad f''_{xy} = -2,$$

vilket för punkten $(2,1)$ ger

$$Q(h,k) = 2h^2 + 2(-2)hk + 4k^2 = 2(h^2 - 2hk + 2k^2) = 2((h-k)^2 + k^2).$$

Vi ser att $Q(h,k)$ är positivt definit, så f har ett $\underline{\text{lokalt minimum i } (2,1)}$.

b) Efter att ha ritat upp området inser vi att den stationära punkten $(2,1)$ ligger utanför. Vi parametriserar nu randen:



- $A : x = 0, 0 \le y \le 3$. Vi får $f(0,y) = 2y^2 = g(y)$, och $g'(y) = 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, vilket också svarar mot ett av områdets hörn som vi väntar med.
- $B : y = 3, 0 \le x \le 3$. Vi får $f(x,3) = x^2 - 8x + 18 = h(x)$, och $h'(x) = 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, vilket ligger utanför intervallet.
- $C : y = x, 0 \le x \le 3$. Vi får $f(x,x) = x^2 - 2x = k(x)$, och $k'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, vilket ger värdet $k(1) = \underline{-1}$.

Funktionsvärdena i hörnen blir $f(0,0) = \underline{0}$, $f(0,3) = \underline{18}$ och $f(3,3) = \underline{3}$. Efter en jämförelse av de intressanta värdena får vi slutligen $\underline{\text{största värde } 18}$ och $\underline{\text{minsta värde } -1}$.

2. Det är lämpligt börja med att integrera med avseende på y. Efter att ha ritat upp området D ser vi att det kan beskrivas enligt $0 \le y \le 1/x$, $1 \le x \le 2$, så

$$\iint_D x^2 e^{x^2}\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^{1/x} x^2 e^{x^2}\,dy \right) dx = \int_1^2 \left[yx^2 e^{x^2} \right]_0^{1/x} dx =$$

$$= \int_1^2 \left(xe^{x^2} - 0 \right) dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_1^2 = \underline{\tfrac{1}{2}(e^4 - e)}.$$

3. a) Vi kan parametrisera γ enligt $(x(t), y(t)) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$, $t : 0 \to 2\pi$, så

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4}\sin^2 t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \tfrac{1}{2}\cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left((\tfrac{1}{4}(1 - \cos^2 t) \cdot (-\sin t) + \tfrac{1}{2}\,\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt =$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} + t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{4}\left(1 - \tfrac{1}{3} + 2\pi + 0 - (1 - \tfrac{1}{3})\right) = \underline{\frac{\pi}{2}}.$$

b) Med $(P, Q) = (y^2, x)$ får vi $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2y$. Kurvan γ bildar en positivt orienterad rand till ellipsskivan D som vi kan uttrycka med ellipspolära kooordinater enligt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{1}{2} r\sin\varphi \end{cases}, \qquad E : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}.$$

Funktionaldeterminanten blir $\frac{1}{2}r$, och Greens formel ger nu

$$I = \iint_D (1-2y)\,dxdy = \iint_E (1 - r\sin\varphi)\tfrac{1}{2} r\,dr d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\sin\varphi\right]_0^1 d\varphi =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\sin\varphi\right)d\varphi = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\varphi}{2} + \tfrac{1}{3}\cos\varphi\right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{2}\left(\pi + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\right) = \underline{\frac{\pi}{2}}.$$

c) Ett nödvändigt villkor för att det skall finnas potential är att $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Eftersom detta inte gäller i vårt fall så kan vi inte beräkna I med hjälp av potentialfunktion.

4. Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot y + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Vi sätter in dessa derivator i differentialekvationen:

$$xy\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial v} + xy\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial v} = 2x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2xy\frac{\partial f}{\partial u} = 2x^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{x}{y} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial u} = v,$$

vilket ger

$$f = uv + g(v), \quad \text{eller} \quad f(x,y) = xy\cdot\tfrac{x}{y} + g\left(\tfrac{x}{y}\right) = \underline{x^2 + g\left(\tfrac{x}{y}\right)},$$

där g är en funktion av en variabel.

Det extra villkoret leder till att

$$f(x,1) = x^2 + g\left(\tfrac{x}{1}\right) = 2x^2 \quad\Leftrightarrow\quad g(x) = x^2,$$

vilket slutligen ger

$$f(x,y) = x^2 + \left(\tfrac{x}{y}\right)^2 = \underline{x^2 + \tfrac{x^2}{y^2}}.$$

5. a) Se läroboken sidan 101.

b) Maximal tillväxt, dvs. den största riktningsderivatan, i en punkt (a,b) är längden av gradienten av f i (a,b), så vi undersöker om det finns någon punkt $(a,b) \in D$ sådan att $|\operatorname{grad} f(a,b)| \ge \frac{9}{2}$. Vi beräknar

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-3x(x^2+y^2)^{1/2}, -3y(x^2+y^2)^{1/2}\right)$$

och

$$|\operatorname{grad} f(x,y)| = \sqrt{9x^2(x^2+y^2) + 9y^2(x^2+y^2)} = \sqrt{9(x^2+y^2)^2} = 3(x^2+y^2).$$

Vi skall alltså maximera $g(x, y) = 3(x^2 + y^2)$ över vårt kompakta område D. Stationär punkt för g är endast origo, och $g(0, 0) = 0$. För att studera g på randen till D så optimerar vi g under bivillkoret $h(x, y) = x^4 + y^4 = 1$, och beräknar därför

$$\operatorname{grad} g = (6x, 6y) \quad \text{och} \quad \operatorname{grad} h = (4x^3, 4y^3).$$

Dessa gradienter är parallella då

$$\begin{vmatrix} 6x & 4x^3 \\ 6y & 4y^3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 24xy^3 - 24x^3y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 24xy(y^2 - x^2) = 0,$$

vilket gäller då $x = 0$, $y = 0$ eller $y = \pm x$, vilket insatt i bivillkoret $x^4 + y^4 = 1$ ger $y = \pm 1$, $x = \pm 1$ respektive

$$x^4 + (\pm x)^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2^{-1/4},$$

dvs. punkterna $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4})$ (totalt 8 stycken). Dessa ger värdena

$$g(0, \pm 1) = 3, \quad g(\pm 1, 0) = 3, \quad g(\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}) = 3(2^{-1/2} + 2^{-1/2}) = 3 \cdot 2^{1/2} = 3\sqrt{2}.$$

Största möjligt tillväxt i D är alltså $3\sqrt{2}$, och eftersom

$$3\sqrt{2} < 3 \cdot 1.5 = 4.5 = \tfrac{9}{2}$$

så är svaret på frågan nej.

6. a) Vi antar först att $c \geq 0$. Då skall vi beräkna volymen av en kropp som har som undre begränsningsyta planet $z = c$, och övre begränsningsyta $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$. Skärningskurvan mellan dessa ytor bestäms av

$$\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = c, \qquad \text{eller med } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \sqrt{1 - r^2} = c \overset{r \geq 0}{\Leftrightarrow} r = \sqrt{1 - c^2}.$$

Kroppens projektion D på xy-planet blir alltså en cirkelskiva med centrum i origo och med radie $\sqrt{1 - c^2}$, vilken i polära koordinater kan beskrivas av

$$E : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{1 - c^2}, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Funktionaldeterminanten blir r, och slutligen volymen

$$\iint_D \left(\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} - c \right) dxdy = \iint_E \left(\sqrt{1 - r^2} - c \right) r \, dr d\varphi$$
$$= \int_0^{\sqrt{1-c^2}} \left(r\sqrt{1 - r^2} - cr \right) dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \left[-\tfrac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2} - c\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-c^2}} =$$
$$= 2\pi \left(-\tfrac{1}{3}c^3 - \tfrac{c}{2}(1 - c^2) + \tfrac{1}{3} \right) = \underline{\pi \left(\tfrac{1}{3}c^3 - c + \tfrac{2}{3} \right)}.$$

Då $c < 0$ blir det mer komplicerat att arbeta med undre och övre yta; kroppen måste isåfall delas upp. Det blir lättare att konstatera att volymen i detta fall blir hela klotets volym minus volymen vi beräknat ovan, med c utbytt mot $-c$. Volymen blir nu alltså

$$\frac{4\pi}{3} - \pi \left(\tfrac{1}{3}(-c)^3 - (-c) + \tfrac{2}{3} \right) = \underline{\pi \left(\tfrac{1}{3}c^3 - c + \tfrac{2}{3} \right)}. \qquad \text{(Samma uttryck!)}$$

b) Vi kan anta att P är exempelvis punkten $(0,0,1)$. Alla punkter som har avstånd $\sqrt{2}$ till P är alla punkter på sfären $x^2+y^2+(z-1)^2=(\sqrt{2})^2$. Vi skall nu alltså beräkna volymen av kroppen som har undre begränsningsyta $z=1-\sqrt{2-(x^2+y^2)}$, och övre $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$, detta under förutsättning att skärningen mellan dessa ytor ej hamnar under xy-planet. Skärningskurvan mellan ytorna bestäms av, med $r=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$1-\sqrt{2-r^2}=\sqrt{1-r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \overset{r\geq 0}{\Leftrightarrow} \quad r=1.$$

För detta värde på r blir $z=0$, så vi konstaterar att vårt påstående angående undre och övre yta var korrekt. Kroppens projektion på xy-planet blir alltså enhetscirkelskivan, vilken i polära koordinater kan beskrivas av

$$E:\begin{cases}0\leq r\leq 1,\\ 0\leq\varphi\leq 2\pi.\end{cases}$$

Volymen blir slutligen

$$\iint_D\left(\sqrt{1-(x^2+y^2)}-(1-\sqrt{2-(x^2+y^2)})\right)\,dxdy=\iint_E\left(\sqrt{1-r^2}-1+\sqrt{2-r^2}\right)r\,drd\varphi=$$

$$=\int_0^1\left(r\sqrt{1-r^2}-r+r\sqrt{2-r^2}\right)\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\left[-\tfrac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}-\frac{r^2}{2}-\tfrac{1}{3}(2-r^2)^{3/2}\right]_0^1=$$

$$=2\pi\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-(-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}2^{3/2}]\right)=\underline{\pi\left(\tfrac{4}{3}\sqrt{2}-1\right)}.$$