LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2016-01-12 kl 8–13

SVAR och ANVISNINGAR

1. Eftersom $D = \{(x, y);\ x \le y \le 4 - x,\ 0 \le x \le 2\}$, så gäller att

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + xy)\,dxdy &= \int_0^2 \Big(\int_x^{4-x} (x^2 + xy)\,dy\Big)dx \\ &= \int_0^2 \Big[x^2 y + \frac{1}{2}xy^2\Big]_{y=x}^{y=4-x} dx \\ &= \int_0^2 x^2(4 - x) + \frac{1}{2}x(4 - x)^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^3\,dx \\ &= \int_0^2 8x - 2x^3\,dx = \Big[4x^2 - \frac{1}{2}x^4\Big]_0^2 = 8.\end{aligned}$$

2. Om $f(x, y) = g(u, v) = g(x, y - x^2)$, så ger kedjeregeln att

$$f'_x = g'_u \cdot 1 + g'_v \cdot (-2x) \quad \text{och} \quad f'_y = g'_u \cdot 0 + g'_v \cdot 1.$$

Ekvationen $f'_x + 2xf'_y = x$ kan alltså skrivas

$$g'_u - 2xg'_v + 2xg'_v = u, \quad \text{dvs.} \quad g'_u = u.$$

Den allmänna lösningen är $g(u, v) = u^2/2 + \varphi(v)$, där φ är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel. Återgång till x och y ger att

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y - x^2).$$

Randvillkoret $f(x, 0) = x^2$ innebär att $x^2/2 + \varphi(-x^2) = x^2$, dvs. $\varphi(-x^2) = x^2/2$. Så $\varphi(t) = -t/2$ (för $t \le 0$) och lösningen

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(y - x^2) = x^2 - \frac{1}{2}y$$

uppfyller det givna randvillkoret.

3. Konen skär paraboloiden då $\sqrt{x^2 + y^2} = 6-(x^2+y^2)$. Eftersom $t^2+t-6 = (t-2)(t+3)$, så gäller att

$$x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 6 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 2.$$

Vidare är $\sqrt{x^2 + y^2} < 6 - (x^2 + y^2)$ för $\sqrt{x^2 + y^2} < 2$. Kroppens volym ges därför av

$$V = \iint_D \Big(6 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}\Big)\,dxdy,$$

där $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \le 4\}$. Övergång till polära koordinater ger att

$$V = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^2 (6 - r^2 - r)r\,dr\Big)d\theta = 2\pi\Big[3r^2 - \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\Big]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

4. a) Kurvan γ kan parametriseras enligt

$$\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0, \pi/2].$$

Eftersom $\boldsymbol{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$, så gäller att

$$\int_\gamma -y\,dx + x\,dy = \int_0^{\pi/2} -2\sin t \cdot (-2\sin t) + 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} dt = 2\pi.$$

b) Funktionen $U(x,y) = 2\sqrt{x+y^2}$ är en potential till vektorfältet

$$(P,Q) = \left(\frac{1}{\sqrt{x+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x+y^2}}\right)$$

i området $\boldsymbol{\Omega} = \{(x,y);\ x > -y^2\}$. Ty

$$U'_x = \frac{2}{2\sqrt{x+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x+y^2}} = P \quad \text{och} \quad U'_y = \frac{2\cdot 2y}{2\sqrt{x+y^2}} = \frac{2y}{\sqrt{x+y^2}} = Q.$$

Eftersom γ ligger i $\boldsymbol{\Omega}$, så följer att

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{x+y^2}}\,dx + \frac{2y}{\sqrt{x+y^2}}\,dy = U(0,2) - U(2,0) = 2\cdot 2 - 2\cdot\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

5. a) Vi ser att $4\cdot 3 + 2 + 2 = 16$ och $3^2 = 2^2 + 2^2 + 1$. Så punkten P ligger på σ.

b) Hyperboloiden är en nivåyta till funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Det gäller att

$$\operatorname{grad} f = (2x, 2y, -2z), \quad \text{speciellt} \quad \operatorname{grad} f(2,2,3) = (4,4,-6).$$

Så vektorn $(2,2,-3)$ är en normalvektor till hyperboloiden i punkten P och tangentplanet ges därför av

$$2(x-2) + 2(y-2) - 3(z-3) = 0, \quad \text{dvs.} \quad 2x + 2y - 3z = -1.$$

c) Tangenten till σ i punkten P är en linje i planet $4z + x + y = 16$ och även en linje i tangentplanet til hyperboloiden i punkten P. Så tangentriktningen är vinkelrät mot både

$$\boldsymbol{n}_1 = (1,1,4), \quad \text{planets normal}$$

och

$$\boldsymbol{n}_2 = (2,2,-3), \quad \text{hyperboloidens normal i punkten } P.$$

Vi ser direkt[1] att om $\boldsymbol{v} = (1,-1,0)$, så är

$$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{n}_1 \quad \text{och} \quad \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{n}_2.$$

Tangenten ges alltså av

$$(x,y,z) = P + t\boldsymbol{v} = (2,2,3) + t(1,-1,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

[1] Alternativt kan man visa att $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (-11, 11, 0)$.

6. Det gäller att

$$g'_x = \frac{1 + x^2 + y^2 - (x+y) \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - x^2 + y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

och

$$g'_y = \frac{1 + x^2 - y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Så

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} g(x,y) = (0,0) &\iff 1 - x^2 + y^2 - 2xy = 0 = 1 + x^2 - y^2 - 2xy \\ &\iff x^2 = y^2 \text{ och } 2xy = 1 \\ &\iff x = \pm y \text{ och } xy = 1/2. \end{aligned}$$

Punkterna $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ är alltså de enda stationära punkter till g på $\mathbb{R}^2$. Notera att

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ och } g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Med bytet

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

får vi att

$$|g(x,y)| = \frac{|r\cos\theta + r\sin\theta|}{1 + r^2} \le \frac{2r}{1 + r^2}.$$

Speciellt är

$$|g(x,y)| \le \frac{1}{2} \text{ då } r = \sqrt{x^2 + y^2} \ge 4.$$

Eftersom $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, så antar g varken sitt största eller minsta värde (om dessa existerar) på området $x^2 + y^2 \ge 16$. Vi vet dock att g har både ett största och ett minsta värde på den kompakta mängden $x^2 + y^2 \le 16$. Våra tidigare undersökningar visar att största värdet är $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och att minsta värdet är $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dessa två värden är alltså största och minsta värde av g på $\mathbb{R}^2$.
Eftersom punkten $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ligger i området $H = \{(x,y);\, y < -x\}$, så blir $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ även minsta värdet av g i H. Men g saknar ett största värde i H. Ty $g(x,y) < 0$ då $y < -x$ och

$$g(x,x) = \frac{2x}{1 + 2x^2} \to 0 \text{ då } x \to \infty.$$