LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Flerdimensionell analys
2015-10-30, Lösningar

1. Det är lämpligt att börja med att integrera med avseende på y. Efter att ha ritat upp området D ser vi att det kan beskrivas enligt $0 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 1$, så

$$\iint_D x^2 e^{xy} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 e^{xy} dy \right) dx = \int_0^1 \left[x e^{xy} \right]_0^x dy =$$
$$= \int_0^1 \left(x e^{x^2} - x e^0 \right) dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{e^1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{e^0}{2} = \underline{\frac{e}{2} - 1}.$$

2. a) För att hitta stationära punkter löser vi systemet

$$\begin{cases} f'_x = 3y - 3x^2 = 0 \\ f'_y = 3x + \ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot \left(-\frac{3x}{2} \right) - 3x^2 = 0 \\ y = -\frac{3x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x(\frac{3}{2} + x) = 0 & (1) \\ y = -\frac{3x}{2} & (2) \end{cases}$$

Ekvation (1) ger $x = 0$ eller $x = -3/2$. Insatt i (2) får vi punkterna $(0, 0)$ och $(-3/2, 9/4)$.
För den kvadratiska formen beräknar vi

$$f''_{xx} = -6x, \quad f''_{xy} = 3 \quad \text{och} \quad f''_{yy} = 2.$$

För punkten $(0, 0)$ får vi

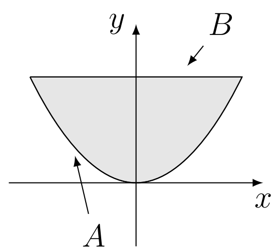
$$Q(h, k) = f''_{xx}(0, 0)h^2 + f''_{xy}(0, 0) \cdot 2hk + f''_{yy}(0, 0)k^2 = 6hk + 2k^2 = 2\left(k + \tfrac{3h}{2}\right)^2 - \tfrac{9h^2}{2},$$

som är indefinit, så f har en sadelpunkt i $(0, 0)$. För punkten $(-3/2, 9/4)$ blir

$$Q(h, k) = f''_{xx}\left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{9}{4}\right) h^2 + f''_{xy}\left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{9}{4}\right) \cdot 2hk + f''_{yy}\left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{9}{4}\right) \cdot k^2 =$$
$$= 9h^2 + 6hk + 2k^2 = 2\left(k + \tfrac{3h}{2}\right)^2 + 9h^2 - \tfrac{9h^2}{2} = 2\left(k + \tfrac{3h}{2}\right)^2 + \tfrac{9h^2}{2}$$

som är positivt definit, så f har ett lokalt minimum i $(-3/2, 9/4)$. Den enda lokala extrempunkten är alltså $\underline{(-3/2, 9/4)}$

b) Efter att ha ritat upp området inser vi att den stationära punkten $(0, 0)$ ligger på randen, och $(-3/2, 9/4)$ utanför. Vi parametriserar nu randen:



- $A : y = 1, -1 \leq x \leq 1$. Vi får $f(x, 1) = 3x + 1 - x^3 = g(x)$, och $g'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, vilket också är intervallets ändpunkter. Intressanta värden är $g(-1) = -1$ och $g(1) = 3$.

- $B : y = x^2, -1 \leq x \leq 1$. Vi får $f(x, x^2) = 3x^3 + x^4 - x^3 = 2x^3 + x^4 = h(x)$, och $h'(x) = 6x^2 + 4x^3 = 2x^2(3 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = -3/2$, där den andra lösningen ligger utanför intervallet. Intressant värde är $h(0) = 0$, och intervallets ändpunkter svarar mot punkterna vi fick i fallet A.

Vi har ovan även fått med vårt områdes "hörn". Efter en jämförelse av de intressanta värdena får vi slutligen <u>största värde 3</u> och <u>minsta värde -1</u>.

3. a) Vi kan parametrisera γ enligt $(x(t), y(t)) = (t, 2t)$, $t : 0 \to 1$, så

$$\int_\gamma (x^2+y)dx+(x+y)dy = \int_0^1 \big((t^2+2t)\cdot 1+(t+2t)\cdot 2\big)dt = \int_0^1 (t^2+8t)dt = \left[\frac{t^3}{3}+4t^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}+4-0 = \underline{\tfrac{13}{3}}.$$

b) Vektorfältet är ett potentialfält med potential $U(x,y) = \arctan(y-x)$ (kolla!), så vi får

$$\int_\gamma \frac{-1}{1+(y-x)^2}\,dx + \frac{1}{1+(y-x)^2}\,dy = U(1,2) - U(0,0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \underline{\tfrac{\pi}{4}}.$$

Ett alternativ är att använda Greens formel och byta väg till exempelvis linjestycket i a)-uppgiften.

4. a) Se läroboken sidan 116.

b) Gradienten av f är

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2-y}, \frac{-1}{x^2-y}\right),$$

och för punkten $(1,-1)$ får vi $\operatorname{grad} f(1,-1) = (1,-1/2)$. Riktningsvektorn har längd $\sqrt{3^2+4^2} = 5$, så normering ger $\mathbf{v} = \frac{1}{5}(3,4)$. Riktningsderivatan av f i riktningen $\mathbf{v}$ i punkten $(1,-1)$ blir nu

$$f'_{\mathbf{v}}(1,-1) = \operatorname{grad} f(1,-1)\cdot \mathbf{v} = (1,-\tfrac{1}{2})\cdot \tfrac{1}{5}(3,4) = \tfrac{1}{5}(3-2) = \underline{\tfrac{1}{5}}.$$

c) Det gäller att

$$|\operatorname{grad} f(1,-1)| = \left|(1,-\tfrac{1}{2})\right| = \sqrt{1^2+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{\sqrt{5}}{2},$$

så riktningsderivatan av f i punkten $(1,-1)$ varierar mellan värdena $-\sqrt{5}/2$ och $\sqrt{5}/2$. Eftersom $\sqrt{5}/2 > 8/9$ är svaret alltså $\underline{\text{ja}}$.

5. a) Vi beräknar först

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ ye^x & e^x \end{vmatrix} = \underline{e^x},$$

vilket enligt en räkneregel för funktionaldeterminanter ger

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{e^x} = \underline{\frac{1}{e^u}}.$$

Här går det såklart också bra att lösa ut x och y i u och v, och sedan beräkna determinanten på vanligt sätt.

b) Vi byter variabler med det föreslagna variabelbytet. Med hjälp av kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot e^x = e^x\frac{\partial f}{\partial v}.$$

De andraderivator vi behöver i ekvationen blir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\frac{\partial f}{\partial v}\right) = e^x\frac{\partial f}{\partial v} + e^x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= e^x\frac{\partial f}{\partial v} + e^x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot ye^x\right) = e^x\frac{\partial f}{\partial v} + e^x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + ye^{2x}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \frac{\partial f}{\partial v}\right) = e^x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= e^x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 0 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot e^x\right) = e^{2x} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Vi sätter in dessa i differentialekvationen, och får efter förenkling

$$e^x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{ye^x},$$

vilket ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{v}$$

Vi integrerar nu denna ekvation med avseende på u:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u}{v} + \varphi(v),$$

där φ är en godtycklig funktion av en variabel. Sedan integrerar vi igen, denna gång med avseende på v:

$$f(u, v) = u \ln v + \Phi(v) + \psi(u),$$

(notera att $v > 0$), där Φ är en primitiv funktion till φ. Nu byter vi tillbaka till de ursprungliga variablerna:

$$\underline{f(x, y) = x \ln(ye^x) + \Phi(ye^x) + \psi(x).}$$

Denna funktion är alltså en lösning till vår differentialekvation om Φ och ψ är godtyckliga (C^2-)funktioner av en variabel.

6. a) Vi börjar med att söka skärningskurvan mellan de två begränsningsytorna $z = 2x^2 + y^2$ och $z = 13 - 4x - 2y$:

$$2x^2 + y^2 = 13 - 4x - 2y \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$$

Kroppens projektion på xy-planet blir alltså ellipsskivan E som ges av olikheten

$$2(x+1)^2 + (y+1)^2 \le 16.$$

Volymen av K beräknas som trippelintegralen

$$\iiint_K dxdydz = \iint_E \left(\int_{2x^2+y^2}^{13-4x-2y} dz\right) dxdy = \iint_E \left(13 - 4x - 2y - 2x^2 - y^2\right) dxdy.$$

För att beräkna dubbelintegralen i högerledet inför vi lämpligen translaterade ellipspolära koordinater:

$$\begin{cases} x = -1 + \frac{r}{\sqrt{2}} \cos\varphi \\ y = -1 + r \sin\varphi. \end{cases}$$

I dessa koordinater beskrivs E av olikheterna $0 \le r \le 4$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och funktionaldeterminanten beräknas till

$$\frac{d(r, \varphi)}{d(x, y)} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Vi får alltså

$$\iint_E \left(13 - 4x - 2y - 2x^2 - y^2\right) dxdy = \iint_E \left(16 - 2(x+1)^2 - (y+1)^2\right) dxdy$$

$$= \int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} (16 - r^2) \frac{r}{\sqrt{2}} d\varphi\right) dr = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[8r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^4 = \underline{\frac{128\pi}{\sqrt{2}}}.$$

b) Att minimera den kvarvarande kroppens volym är samma som att maximera hålets volym, dvs som att maximera

$$\iiint_H dxdydz = \iint_D \left(\int_{2x^2+y^2}^{13-4x-2y} dz \right) dxdy = \iint_D \left(13 - 4x - 2y - 2x^2 - y^2 \right) dxdy,$$

där D är cirkelskivan $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 1$. (Enligt antagantet är (a, b) valda så att hålet verkligen avgränsas av de båda funktionsytorna). Vi inför polära koordinater med medelpunkt (a, b):

$$\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases}$$

och får dubbelintegralen i högerledet ovan till

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (13 - 4(a + r\cos\varphi) - 2(b + r\sin\varphi) - 2(a + r\cos\varphi)^2 - (b + r\sin\varphi)^2) r \, d\varphi \right) dr =$$
$$= 2\pi \int_0^1 (13 - 4a - 2b - 2a^2 - b^2) r \, dr - \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^3 (2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) d\varphi \right) dr =$$
$$= \pi \left(16 - 2(a+1)^2 - (b+1)^2 \right) - C$$

där C är ett tal som inte beror av a och b. (Det går att beräkna C, men det är onödigt arbete.) Vi ser att hålet har maximal volym då $a = b = -1$.