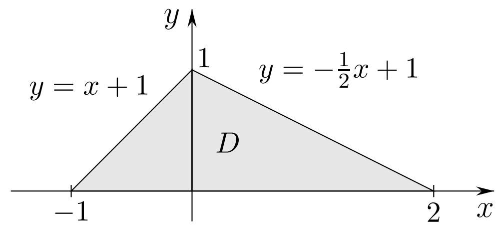
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2015–05–30 kl 8–13

1. I detta fall blir beräkningarna enklare om vi först integrerar i x-led:

$$\iint_D y\,dxdy = \int_0^1 y\left(\int_{y-1}^{2-2y} 1\,dx\right)dy =$$



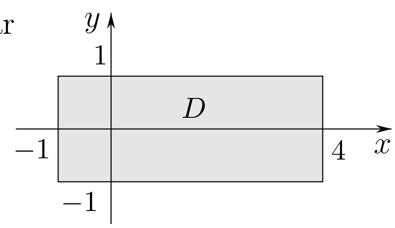
$$= \int_0^1 y((2-2y)-(y-1))\,dy =$$

$$= \int_0^1 (-3y^2+3y)\,dy = \left[-y^3+\tfrac{3}{2}y^2\right]_0^1 = -1+\tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

2. a) Funktionen är kontinuerlig och området D kompakt, så funktionen har både ett största och minsta värde på D.

Vi tar fram intressanta punkter, och börjar med (inre) stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = e^{-xy}(1+2y-xy) = 0, \\ f'_y = -x(x-2)e^{-xy} = 0. \end{cases}$$



Delar vi upp den andra ekvationen i fallen $x=0$ och $x=2$, och kombinerar med den första, får vi den enda stationära punkten $(0,-1/2)$ (som ligger i D) och funktionsvärdet $f(0,-1/2)=-2$.

Vi övergår sedan till att studera f på randen (exklusive hörn):

$\underline{x=4}$: Funktionen blir $g_1(t)=f(4,t)=2e^{-4t}$, $-1\le t\le 1$, vilken är strängt avtagande och därför saknar (inre) intressanta punkter.

$\underline{x=-1}$: Vi får $g_2(t)=f(-1,t)=-3e^{t}$, $-1\le t\le 1$, återigen en strängt avtagande funktion som saknar (inre) intressanta punkter.

$\underline{y=1}$: Här studerar vi $g_3(t)=f(t,1)=(t-2)e^{-t}$, $-1\le t\le 4$. Derivatan blir $g_3'(t)=(3-t)e^{-t}$ med nollstället $t=3$ i intervallet. Vi får den intressanta punkten $(3,1)$ med funktionsvärdet $f(3,1)=g_3(3)=e^{-3}$.

$\underline{y=-1}$: Här studerar vi $g_4(t)=f(t,-1)=(t-2)e^{t}$, $-1\le t\le 4$. Derivatan är denna gång $g_4'(t)=(t-1)e^{t}$ med nollstället $t=1$. Intressant punkt är $(1,-1)$ med funktionsvärdet $f(1,-1)=g_4(1)=-e$.

Till slut beräknar vi funktionsvärdena i ”hörnen”: $f(4,1)=2e^{-4}$, $f(4,-1)=2e^{4}$, $f(-1,1)=-3e$ och $f(-1,-1)=-3e^{-1}$. En jämförelse av funktionsvärdena ovan ger oss att f har största värde $2e^4$ och minsta $-3e$.

b) Om vi sätter t.ex. $y = 0$ så får vi $g(x) = f(x,0) = x - 2$. Denna funktion går mot ∞ då $x \to \infty$ och $-\infty$ då $x \to -\infty$. Således saknar f både största och minsta värde då $D = \mathbb{R}^2$.

3. a) Vi beräknar först gradienten i punkten,

$$\operatorname{grad} f = (3z, -4, 3x - 2z) \qquad \Rightarrow \qquad (\operatorname{grad} f)(-1,0,1) = (3,-4,-5),$$

och normerar rikningsvektorn,

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}(1,2,-2) = \tfrac{1}{3}(1,2,-2).$$

Riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}$ ges nu av skalärprodukten av dessa vektorer:

$$f'_{\mathbf{v}}(-1,0,1) = (3,-4,-5) \cdot \tfrac{1}{3}(1,2,-2) = \tfrac{5}{3}.$$

Funktionen har störst riktningsderivata i gradientens riktning, dvs. i vårt fall i riktningen $(3,-4,-5)$.

b) Eftersom gradienten till f i punkten $(-1,0,1)$, dvs. vektorn $(3,-4,-5)$, är en normalvektor till det sökta tangentplanet, så ges planets ekvation av

$$3(x-(-1)) - 4(y-0) - 5(z-1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x - 4y - 5z + 8 = 0.$$

c) För att tangentplanet i punkten (a,b,c) på nivåytan skall vara parallellt med planet $3x + 2y - z = 5$ så måste $(\operatorname{grad} f)(a,b,c) = (3c, -4, 3a - 2c)$ vara parallell med vektorn $(3,2,-1)$ (som fås från koefficienterna i planets ekvation). Med andra ord skall det finnas ett reellt tal λ sådant att

$$\begin{cases} 3c &= 3\lambda, \\ -4 &= 2\lambda, \\ 3a - 2c &= -\lambda. \end{cases}$$

Från systemet kan vi avläsa att $\lambda = -2$, samt att $c = -2$ och $a = -2/3$. Eftersom punkten (a,b,c) även ska ligga på nivåytan, så måste det gälla att $f(a,b,c) = 3ac - 4b - c^2 + 4 = 0$, och insättning av a- och c-värdena i denna ekvation ger oss $b = 1$. Slutsatsen är att $(-2/3, 1, -2)$ är den enda punkt av det slag som efterfrågas i uppgiften.

4. a) Kurvintegralen kan beräknas direkt genom att parametrisera kurvstyckena:

$$\int_\gamma xy\,dx - 2y\,dy = \int_{\gamma_1} xy\,dx - 2y\,dy + \int_{\gamma_2} xy\,dx - 2y\,dy =$$

$$= \left[\gamma_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} t : 0 \to 1, \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = 1, \end{cases} t : 1 \to 0 \right] =$$

$$= \int_0^1 \left(t \cdot t^2 \cdot 1 - 2t^2 \cdot 2t\right) dt + \int_1^0 (t \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0)\, dt =$$

$$= \int_0^1 -3t^3\,dt + \int_1^0 t\,dt = \left[-\tfrac{3}{4}t^4\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{2}t^2\right]_1^0 = -\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{5}{4}.$$

b) Uppgiften kan lösas på flera olika sätt. Enklast är nog att bestämma en potentialfunktion U på området $y > |x|$. Eftersom det där skall gälla att

$$U'_x = \frac{-x}{y^2 - x^2}, \qquad U'_y = \frac{y}{y^2 - x^2},$$

så ger en snabb kontroll att funktionen $U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(y^2 - x^2)$ fungerar. Nu kan vi direkt beräkna kurvintegralen:

$$\int_\gamma \frac{-x}{y^2 - x^2}\, dx + \frac{y}{y^2 - x^2}\, dy = U(0, 3) - U(1, 2) = \tfrac{1}{2} \ln 9 - \tfrac{1}{2} \ln 3 = \tfrac{1}{2} \ln 3.$$

5. a) Vi börjar med att ta fram stationära punkter:

$$\begin{cases} g'_x = 3x^2 - 2y = 0, \\ g'_y = -2x + 2y = 0. \end{cases}$$

Då den andra ekvationen ger oss att $x = y$, får vi efter insättning i den första punkterna $(0, 0)$ och $(2/3, 2/3)$.

För att bestämma karaktären av dessa punkter tar vi fram andraderivatorna:

$$g''_{xx} = 6x, \qquad g''_{xy} = -2, \qquad g''_{yy} = 2.$$

Vi beräknar och kvadratkompletterar den kvadratiska formen $Q(h, k) = g''_{xx}h^2 + 2g''_{xy}hk + g''_{yy}k^2$ för var och en av punkterna. I fallet $(0, 0)$ får vi

$$Q_1(h, k) = -4hk + 2k^2 = 2(k - h)^2 - 2h^2,$$

vilken är indefinit, och i fallet $(2/3, 2/3)$ blir formen

$$Q_2(h, k) = 4h^2 - 4hk + 2k^2 = 2(k - h)^2 + 2h^2,$$

vilken är positivt definit. Således är $(0, 0)$ en sadelpunkt, vilket ej är en lokal extrempunkt, och $(2/3, 2/3)$ en lokal minimipunkt, vilket är en lokal extrempunkt.

b) Kedjeregeln ger oss att

$$\begin{aligned} f'_y &= 2xy\varphi'(xy^2), \\ f''_{xy} &= (f'_y)'_x = 2xy^3\varphi''(xy^2) + 2y\varphi'(xy^2), \\ f''_{yy} &= 4x^2y^2\varphi''(xy^2) + 2x\varphi'(xy^2), \end{aligned}$$

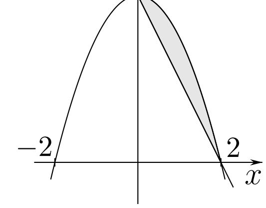
och efter att ha satt $t = xy^2$ så ger insättning i ekvationen att

$$x(2xy^3\varphi''(t) + 2y\varphi'(t)) + y(4x^2y^2\varphi''(t) + 2x\varphi'(t)) - 2(2xy\varphi'(t)) = \frac{6}{y}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 6x^2y^3\varphi''(t) = \frac{6}{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi''(t) = \frac{1}{x^2y^4} = \frac{1}{t^2}.$$

Bestämmer vi primitiv två gånger får vi $\varphi(t) = -\ln(t) + Ct + D$, där C och D är godtyckliga konstanter. De sökta lösningarna är alltså $f(x, y) = -\ln(xy^2) + Cxy^2 + D$.

6. a) Ytan $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z = 4$, eller ekvivalent $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$, är en (upp-och-nervänd) elliptisk paraboloid med vertex i $(0, 0, 4)$ medan $2x + z = 4$, ekvivalent $z = 4 - 2x$, är ett plan.



I den sökta kroppen kommer paraboloiden att ligga över planet (i figuren demonstreras skärningen med xz-planet), och vi undersöker därför olikheten

$$4 - x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 \geq 4 - 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-1)^2 + \tfrac{1}{4}y^2 \leq 1,$$

vilket i xy-planet svarar mot den elliptiska skivan med medelpunkt $(1,0)$ och halvaxlarna 1 repektive 2, nedan betecknad D.

Nu kan vi beräkna volymen:

$$V = \iint_D (4 - x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 - (4-2x))\,dxdy = \iint_D (1 - (x-1)^2 - \tfrac{1}{4}y^2)\,dxdy =$$

$$= \left[\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi, \\ y = 2r\sin\varphi, \end{cases} \quad E : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases} \quad \left|\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)}\right| = 2r \right] =$$

$$= \iint_E 2r(1-r^2)\,drd\varphi = 2\pi \int_0^1 (2r - 2r^3)\,dr = 2\pi \left[r^2 - \tfrac{1}{2}r^4\right]_0^1 = \pi.$$

b) Funktionen är kontinuerlig och skärningen är kompakt så både största och minsta värde existerar.

<u>Alternativ 1:</u> Vi optimerar f med avseende på de två bivillkoren $g_1(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z = 4$ och $g_2(x,y,z) = 2x + z = 4$. Intressanta punkter (x,y,z) är de för vilka vektorerna $\text{grad} f = (2,4,5)$, $\text{grad} g_1 = (2x, y/2, 1)$ och $\text{grad} g_2 = (2,0,1)$ är linjärt beroende. Detta är uppfyllt precis då

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2x & \frac{1}{2}y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y + 8 - 5y - 8x = 8 - 8x - 4y = 0.$$

Kombinerar vi detta samband med de båda bivillkoren får vi de två punkterna $(1 + 1/\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ och $(1 - 1/\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, med funktionsvärdena

$$f\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\right) = 12 - 8\sqrt{2}, \quad \text{respektive}$$
$$f\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right) = 12 + 8\sqrt{2}.$$

Funktionen har alltså största värde $12 + 8\sqrt{2}$ och minsta värde $12 - 8\sqrt{2}$.

<u>Alternativ 2:</u> Skärningens projektion på xy-planet ges av ellipsen $(x-1)^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ (se lösningen till a-uppgiften). Om vi parametriserar denna kurva med $(x,y) = (1 + \cos t, 2\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, och beräknar z-koordinaten utifrån ekvationen till endera ytorna, t.ex. $z = 4 - 2x = 4 - 2(1 + \cos t) = 2 - 2\cos t$ så får vi en parametrisering av själva skärningen γ:

$$(x,y,z) = (1 + \cos t, 2\sin t, 2 - 2\cos t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Nu återstår det att optimera funktionen

$$h(t) = f(1 + \cos t, 2\sin t, 2 - 2\cos t) = 12 + 8\sin t - 8\cos t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Hjälpvinkelmetoden ger att $h(t) = 12 + 8\sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$, och vi får nu maximum då $t = 3\pi/4$ (sinus blir 1) och minimum då $t = 7\pi/4$ (sinus blir -1). Största och minsta värde blir alltså $12 + 8\sqrt{2}$ respektive $12 - 8\sqrt{2}$.