

*INGA HJÄLPMEDEL. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Lösningarna, som du efter varje del scannar och skickar in, ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv in dina svar i Canvas innan du avslutar quizet.*

### Godkändtel

*För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.*

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{y^2} dx dy,$$

där  $D$  är triangelskivan med hörn i punkterna  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  och  $(-2, 2)$ .

2. Bestäm alla lösningar på formen  $f(x, y) = g(\frac{x}{y})$  till ekvationen

$$x f'_x - y f'_y = 1, \quad x > 0, y > 0.$$

3. Bestäm största och minsta värde av funktionen

$$f(x, y) = xy^2 - xy + y$$

på det område  $D$  i  $xy$ -planet som ges av  $|y| \leq x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .

4. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} y dx + (x + 1) dy,$$

där  $\gamma$  är den del av enhetscirkeln som går från punkten  $(1, 0)$  till  $(0, 1)$ .

5. Temperaturen i punkten  $(x, y)$  i  $xy$ -planet ges av funktionen  $T(x, y) = x^2 - \frac{y^2}{3}$ . Vi låter  $P$  beteckna punkten  $(2, 3)$ .

- Skissera nivåkurvan som går genom punkten  $P$ . Vad blir det för slags kurva?
- En insekt springer omkring i  $xy$ -planet. I vilken riktning skall en insekt som befinner sig i punkten  $P$  röra sig för att värma sig så snabbt som möjligt?
- Efter ett tag har insekten tröttnat på att ränna omkring, och vill hitta ett lämpligt ställe att slå sig ner för gott. Den söker en punkt  $Q : (x_0, y_0)$  i  $xy$ -planet där det är varmare än i alla andra punkter i någon omgivning av punkten  $Q$ . Finns det någon sådan punkt?

6. Beräkna volymen av den kropp i rummet som begränsas av ytorna  $z = 4 - x^2 - y^2$  och  $z = 3y^2$ .

## Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 3 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. Låt  $\Gamma$  vara den yta som ges av ekvationen

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 16.$$

Bestäm först en ekvation för tangentplanet till  $\Gamma$  i punkten  $(2, 2, \sqrt{2})$ .

För vilka punkter  $P$  på  $\Gamma$  gäller det att tangentplanet till  $\Gamma$  i punkten  $P$  innehåller punkten  $(0, 0, 4)$ ? Beskriv även mängden av alla sådana punkter  $P$  geometriskt.

8. Bestäm största och minsta värde av funktionen

$$f(x, y, z) = xz + y^2,$$

på mängden  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

9. Medelvärdet av en funktion  $f(x, y)$  på ett område  $D$  i  $xy$ -planet definieras som

$$M = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x, y) \, dx dy,$$

där  $\mu(D)$  är arean av området  $D$ .

Låt  $D$  vara det område i  $xy$ -planet som ges av  $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Bestäm medelavståndet från punkterna i området  $D$  till linjen  $y = x$ .