

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x^2}{1 + (x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

där D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 2$.

2. Lös den partiella differentialekvationen

$$2y f'_x + f'_y = y,$$

exempelvis genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = x - y^2, \\ v = y. \end{cases}$$

Bestäm också den lösning som uppfyller $f(-x, 0) = \frac{x}{2}$.

3. Låt γ vara parabelbågen $y = 1 - x^2$, från $(0, 1)$ till $(1, 0)$. Beräkna

a) $\int_{\gamma} 3y^2 dx + 2x^2 dy,$ (0.5)

b) $\int_{\gamma} \frac{2x}{2x^2 + 3y^2} dx + \frac{3y}{2x^2 + 3y^2} dy.$ (0.5)

4. a) Beräkna volymen av den begränsade kropp K som avgränsas av ytorna $z = x^2$ och $z = 2 - x^2 - y^2$. (0.6)

b) Bestäm alla tal C sådana att planet $2x + 2y - 3z = C$ blir tangentplan till ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$. (0.4)

5. Låt $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

a) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(2, -1)$ i riktningen $(2, -1)$. (0.3)

b) Finns det någon punkt (a, b) och någon riktning \mathbf{v} så att $f'_{\mathbf{v}}(a, b) = \frac{3}{\sqrt{5}}$? (0.7)

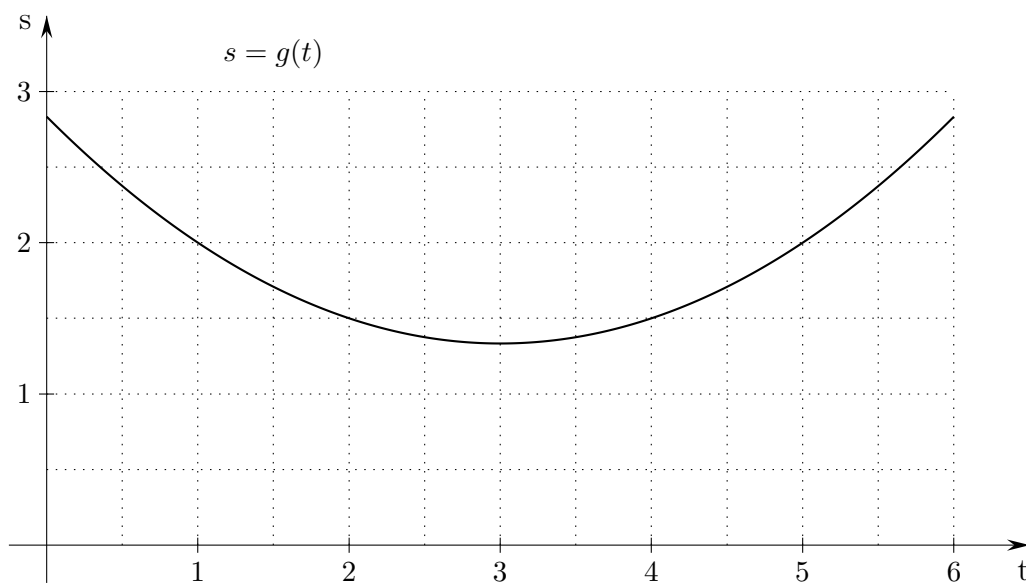
Var god vänd!

6. Studera $f(x, y) = g(\frac{1}{4}x^2 + y^2)$, där $g(t)$ är den funktion i en variabel (med definitionsmängd $0 \leq t \leq 6$) vars graf visas nedan.

a) Skissa nivåkurvan $f(x, y) = 2$. (0.3)

b) Vilken riktning har gradienten av f i punkten $(\sqrt{2}, 1)$? Ange också en uppskattning av $\text{grad}f(\sqrt{2}, 1)$. (0.4)

c) Bestäm alla stationära punkter för f . (0.3)



LYCKA TILL!