LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2017-06-03 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt $f(x,y) = xe^y$, samt $P_1 : (0,0)$, $P_2 : (1,0)$ och $P_3 : (0,1)$.

a) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten P_2 i *riktning mot* punkten P_3. (0.4)

b) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy,$$

där D är triangelskivan med hörn i P_1, P_2 och P_3. (0.6)

2. a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y) = 3x^2 + y^3 - 3xy^2$, och ange för varje sådan punkt karaktären av motsvarande kvadratiska form. (0.5)

b) Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = 3x^2 + y^3 - 3xy^2$ på området som definieras av olikheterna $0 \le y \le x \le 2$. (0.5)

3. Låt $f(x,y) = 3 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$.

a) Rita den nivåkurva till f som går genom punkten $(\sqrt{3}, 1)$. Rita också ut gradienten till f i någon punkt på denna kurva. (Du behöver bara ha rätt riktning på gradienten, inte rätt längd.) (0.4)

b) Bestäm största och minsta värde av f på kurvan $x^4 + y^4 = 1$. (0.6)

4. Betrakta kurvintegralen

$$I = \int_\gamma x^2\,dx - y\,dy,$$

där γ är den övre halvan av ellipsen $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$, från $(1,0)$ till $(-1,0)$.

a) Beräkna I genom att parametrisera γ. (0.3)

b) Beräkna, om det går, I med hjälp av potentialfunktion. Ge annars en motivering till varför det inte går. (0.3)

c) Beräkna I genom att på lämpligt sätt komplettera integrationsvägen och sedan använda Greens formel. (0.4)

Var god vänd!

5. a) Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \qquad x > 0,\ y > 0,$$

exempelvis genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = y. \end{cases} \tag{0.7}$$

b) Visa att alla funktioner på formen $f(x, y) = g(xy)$, där g är en funktion av en variabel (två gånger kontinuerligt deriverbar), löser differentialekvationen

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad x > 0,\ y > 0. \tag{0.3}$$

6. Låt H vara hyperboloiden $x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z^2 = 1$.

a) Beräkna volymen av kroppen K som begränsas av H samt planen $z = 0$ och $z = 2$. (0.5)

b) Visa att alla punkter P på H, i vilka tangentplanet till H går genom punkten $(1, 4, 2)$, ligger i ett plan. Bestäm också en ekvation för detta plan. (0.5)

GLAD SOMMAR!