LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2017–03–17 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^2$ på området $0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 2$.

2. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(2,1,16)$ på ytan. (0.3)

b) Bestäm tangenten i punkten $P_0 = (2,1)$ till den nivåkurva till f som går genom P_0. (0.2)

c) Beräkna volymen av det område som ligger mellan ytan $z = f(x,y)$ och xy-planet då $0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 1$. (0.5)

3. Låt D vara den del av cirkelskivan med medelpunkt i origo och radien 2 som ligger i första kvadranten.

a) Beräkna, genom att parametrisera kurvan, kurvintegralen

$$\int_{\partial D} (2y^2 + 3x)dx + 2xy\,dy$$

över randen till D, genomlöpt ett varv i positiv omloppsriktning. (0.4)

b) Integralen i a) kan också beräknas med hjälp av en dubbelintegral. Motivera varför och beräkna dubbelintegralen, utan att använda resultatet i a). (0.3)

c) Bestäm alla funktioner $f(x)$ som är sådana att

$$\int_\gamma f(x)(2y^2 + 3x)dx + f(x)2xy\,dy = 0$$

för alla slutna kurvor γ. Glöm inte motivera varför integralen är noll för alla sådana kurvor γ. (0.3)

4. I ett terrängavsnitt som i lämpliga koordinater kan beskrivas som grafen till funktionen $f(x,y) = 8x^2 - 24xy + y^2$ finns en stig som ges av ekvationen $8x^2 + y^2 = 1$ i kartan.

a) Om du står i punkten $(0,1,1)$ på stigen, vilken lutning har terrängen i riktningen $(-1,1)$? I vilken riktning i denna punkt på stigen är terrängen som brantast uppåt? (0.4)

b) Vilken/vilka punkt(er) på denna stig ligger högst? (0.6)

Var god vänd!

5. Låt
$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4.$$

a) Bestäm alla stationära punkter till f samt deras karaktär. (0.6)

b) Skissera så väl det går en nivåkurveplot till f över ett område så stort att det innehåller alla stationära punkter och lite till. Beskriv också i ord hur kurvan $x^4 + y^4 = 4xy$ ser ut. (0.4)

6. För funktionen $u(x,t)$ gäller att
$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = -u^2, \qquad u(x,0) = x.$$

Bestäm en funktion $x(t)$ med $x(0) = a$ sådan att funktionen $r(t) = u(x(t),t)$ uppfyller differentialekvationen $r'(t) = -r(t)^2$. Lös därefter ekvationen för u fullständigt då $x > 0, t > 0$, t.ex. genom att använda differentialekvationen för $r(t)$. Visa slutligen att $u(x,t) \to 0$ då $t \to \infty$ för alla x.

Lycka till!