

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt

$$f(x, y, z) = \frac{3z^2}{1 + xy} \quad \text{och} \quad P : (1, 2, 1).$$

a) Beräkna riktningsderivatan av  $f$  i punkten  $P$  i riktningen  $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ . (0.3)

b) I vilken riktning växer  $f$  snabbast utgående från punkten  $P$ ? (0.3)

c) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan  $f(x, y, z) = 1$  i punkten  $P$ . (0.4)

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{\sin(xy)}{x} dx dy,$$

där  $D$  är det begränsade område som avgränsas av linjerna  $y = 0$ ,  $x = \frac{1}{2\pi}$ ,  $x = \frac{2}{\pi}$  och kurvan  $y = \frac{1}{x^2}$ .

3. Låt

$$f(x, y) = (y - x)e^{x^2 - y}.$$

a) Bestäm största och minsta värde av  $f$  på området  $D = \{(x, y); x^2 \leq y \leq x\}$ . (0.8)

b) Antar  $f$  något största och/eller minsta värde på  $D = \mathbb{R}^2$ ? Ange dessa i så fall. (0.2)

4. Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_{\gamma} \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 y} dx + \frac{2y^2 - x^2}{xy^2} dy,$$

där  $\gamma$  är parabeln  $y = (x - 1)^2 + 1$  från  $(1, 1)$  till  $(2, 2)$ .

5. Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy, \quad x > 0, y > 0,$$

exempelvis genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = x, \\ v = \frac{x}{y}. \end{cases}$$

6. Ett glas vars kupa har formen  $z = x^2 + y^2$ ,  $z \leq 1$ , (i någon enhet) är fyllt till en viss höjd med vin. När glaset lutar  $45^\circ$  börjar vinet precis rinna ut. Hur mycket vin finns i glaset? Till vilken höjd i kupan når vinet när glaset står på ett plant underlag?

**LYCKA TILL!**