LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FLERDIMENSIONELL ANALYS
2016-06-04 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. **a)** Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x$, och ange även deras karaktär. (0.5)

b) Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x$ på triangelskivan med hörn i $(0,0)$, $(0,3)$ och $(3,3)$. (0.5)

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x^2 e^{x^2}\,dxdy,$$

där D är det begränsade område som avgränsas av linjerna $y=0$, $x=1$, $x=2$ samt kurvan $y=1/x$.

3. Betrakta kurvintegralen

$$I = \int_\gamma y^2\,dx + x\,dy,$$

där γ är ellipsen $x^2+4y^2=1$ genomlöpt ett varv i positiv led.

a) Beräkna I genom att parametrisera γ. (0.4)

b) Beräkna I med hjälp av Greens formel. (0.4)

c) Kan man beräkna I med hjälp av potentialfunktion? (0.2)

4. Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2, \qquad x>0,\ y>0,$$

exempelvis genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = \dfrac{x}{y}. \end{cases}$$

Bestäm också en lösning som uppfyller att $f(x,1) = 2x^2$.

5. **a)** Definiera begreppet riktningsderivata för funktionen $f(x,y)$. (0.2)

b) Låt $f(x,y) = 2 - \big(x^2+y^2\big)^{3/2}$, och låt D vara området i xy-planet som definieras av olikheten $x^4+y^4 \le 1$. Finns det någon punkt $(a,b)\in D$ och någon riktning $\mathbf{v}$ så att $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = \frac{9}{2}$? (Eventuella punkter och riktningar behöver ej anges.) (0.8)

V.G.V.

6. Låt K vara klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

a) Beräkna volymen av den del av K som ligger över höjden $z = c$, där c är ett givet tal sådant att $-1 < c < 1$. (0.5)

b) Låt P vara en punkt på randen till K. Beräkna volymen av den del av K som består av alla punkter med avstånd högst $\sqrt{2}$ till P. (0.5)

GLAD SOMMAR!