

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar om så är möjligt. **Glöm inte att lämna in detta papper tillsammans med dina övriga lösningar!**

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D xy \, dx dy,$$

där

$$D = \{(x, y); x \geq 1, x + y \leq 4, y \geq x^2/2\}.$$

2. a) Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x, y) = 2x^2 - x^4 - 2y^2$. (0.7)

b) Bestäm tangenten i punkten $(2, 3)$ till kurvan $2x^2 - x^4 - 2y^2 + 26 = 0$. (0.3)

3. a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} x^2 dx + \ln(x^2 + y^2) dy,$$

där γ är den del av enhetscirkeln som går från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$ i övre halvplanet $y \geq 0$. (0.5)

- b) Visa att kurvintegralen

$$\int_{\gamma} (x + y)e^{xy+x^2/2} dx + xe^{xy+x^2/2} dy$$

inte beror av vilken kurva γ mellan två givna punkter som vi integrerar längs. Beräkna integralen för en kurva som förbinder origo med punkten $(1, 1)$. (0.5)

4. a) Beräkna största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2y - 3xy + 2x - 4y$ på området $\{(x, y); |x| \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$. (0.5)

b) Mellan vilka värden varierar uttrycket xy^3 på kurvan $x^4 + y^4 = 1$? (0.5)

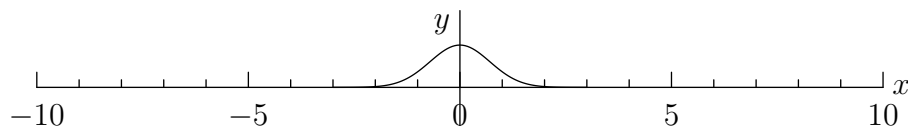
5. a) Bestäm alla lösningar $f(x, t)$ till vågekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

(där $c > 0$ är en konstant) genom att använda variabelbytet (0.7)

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}.$$

- b) Låt nu $f(x, t)$ vara lösningen till vågekvationen med $c = 1$ sådan att $f(x, 0)$ har grafen i figuren nedan och $\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0$. Rita i figuren ut grafen för $f(x, 5)$. (0.3)



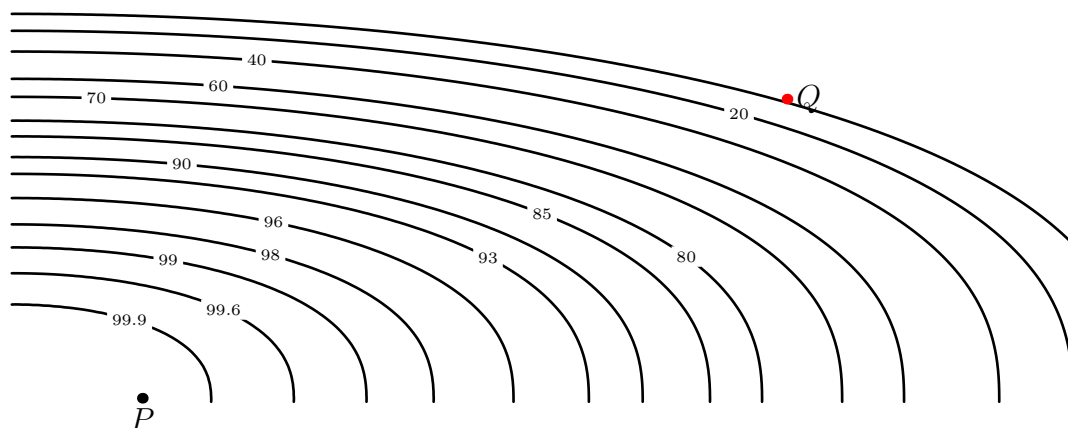
Var god vänd!

6. Paul står i en skidbacke och tittar ner längs berget. Den relevanta delen av berget beskrivs som grafen av funktionen

$$f(x, y) = 100 - (x^2 + 8y^{5/2})^2 \text{ då } x \geq 0, y \geq 0,$$

och Paul står i den punkt P som på kartan har koordinaterna $(1/e, 1/100)$. Paul vill åka nedför berget så att han **i varje punkt** åker så brant nedåt som möjligt.

- a) Bestäm den riktning i vilken Paul ska börja sin nedfärd. (0.3)
- b) Figuren nedan föreställer en topografisk karta över berget, med några nivåkurvor utritade. När Paul kommer ner till bergets fot befinner han sig i den punkt som svarar mot punkten Q i figuren. Rita i figuren, så gott det går, ut den kurva som beskriver Pauls väg nedför berget. (Motiveringen lämnas tillsammans med övriga lösningar.) (0.2)



- c) Kurvan som i kartan beskriver Pauls väg nedför berget kan skrivas $y = \phi(x)$. Bestäm funktionen ϕ . (0.5)

Glöm inte att lämna in detta papper om du gjort uppgift 5b eller 6b!

Lycka till!