

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 + xy) \, dx \, dy,$$

där D är triangelskivan med hörn i $(0, 0)$, $(2, 2)$ och $(0, 4)$.

2. Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$f'_x + 2xf'_y = x,$$

till exempel genom att göra variabelbytet $u = x$, $v = y - x^2$. Bestäm också en lösning som uppfyller att $f(x, 0) = x^2$.

3. Beräkna volymen av den begränsade kropp K som innesluts av konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och paraboloiden $z = 6 - (x^2 + y^2)$.

4. Låt γ vara den kurva som löper ett kvarts varv längs cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ från $(2, 0)$ till $(0, 2)$.

a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} -y \, dx + x \, dy. \quad (0.4)$$

b) Beräkna

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{x + y^2}} \, dx + \frac{2y}{\sqrt{x + y^2}} \, dy. \quad (0.6)$$

5. Planet $4z + x + y = 16$ skär hyperboloiden $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ och bildar kurvan σ . Låt P vara punkten $(2, 2, 3)$.

a) Visa att P ligger på σ . (0.2)

b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till hyperboloiden i punkten P . (0.4)

c) Bestäm en ekvation för tangenten till σ i punkten P . (0.4)

6. Bestäm eventuella största och minsta värden av funktionen

$$g(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$$

på \mathbb{R}^2 . Har g något största och/eller minsta värde i området $y < -x$? Ange i så fall dessa/detta.

LYCKA TILL !