**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**TENTAMENSSKRIVNING**
**FLERDIMENSIONELL ANALYS**
**2015-10-30 kl 14–19**

*INGA HJÄLPMEDEL.*
*Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.*

**1.** Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x^2 e^{xy}\,dxdy,$$

där $D$ är det begränsade område som avgränsas av linjerna $y = 0$, $x = 1$ och $y = x$.

**2. a)** Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x, y) = 3xy + y^2 - x^3$. (0.6)

**b)** Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = 3xy + y^2 - x^3$ i området som ges av olikheterna $y \geq x^2$ och $y \leq 1$. (0.4)

**3. a)** Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (x^2 + y)\,dx + (x + y)\,dy,$$

där $\gamma$ är linjesegmentet från $(0, 0)$ till $(1, 2)$. (0.5)

**b)** Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{-1}{1 + (y - x)^2}\,dx + \frac{1}{1 + (y - x)^2}\,dy,$$

där $\gamma$ är kurvan längs ellipsen $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, medurs från $(0, 0)$ till $(1, 2)$. (0.5)

**4. a)** I vilken riktning har $f(x, y)$ sin maximala tillväxthastighet, och hur stor är denna? Bevisa dina påståenden. (0.4)

**b)** Hur snabbt växer $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$ i riktningen $(3, 4)$ i punkten $(1, -1)$? (0.3)

**c)** Finns det någon riktning i vilken $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$ har tillväxthastigheten $8/9$ i punkten $(1, -1)$? (0.3)

**5. a)** Beräkna, för variabelbytet

$$\begin{cases} u = x, \\ v = ye^x, \end{cases}$$

funktionaldeterminanterna $\dfrac{d(u, v)}{d(x, y)}$ och $\dfrac{d(x, y)}{d(u, v)}$. (0.3)

**b)** Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}, \qquad y > 0,$$

exempelvis genom att göra variabelbytet i **a)**-uppgiften. (0.7)

V.G.V.

**6.** Låt $K$ vara kroppen som definieras av olikheterna

$$2x^2 + y^2 \leq z \leq 13 - 4x - 2y.$$

**a)** Beräkna volymen av $K$. (0.4)

**b)** Genom $K$ borras ett hål med radie 1, parallellt med $z$-axeln och med centrum i $(x, y) = (a, b)$. (Här är $a$ och $b$ valda så att hålet helt och hållet går genom $K$.) Hur skall punkten $(a, b)$ väljas för att volymen av den kropp som återstår skall bli så liten som möjligt? (0.6)