

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt  $f(x, y, z) = xy^2z^3$

a) I vilken riktning växer  $f$  snabbast i punkten  $(1, -1, 2)$ ? (0.3)

b) Hur snabbt växer  $f$  i riktningen  $(2, 1, 2)$  i punkten  $(1, -1, 2)$ ? (0.3)

c) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan  $f(x, y, z) = 8$  i punkten  $(1, -1, 2)$ . (0.4)

2. a) Bestäm alla stationära punkter till  $f(x, y) = x^2 - yx^2 + y^2$ . Ange även deras karaktär. (0.6)

b) Bestäm största och minsta värde av  $f(x, y) = x^2 - yx^2 + y^2$  i det begränsade område som avgränsas av kurvorna  $y = x^2$  och  $y = 4$ . (0.4)

3. Beräkna volymen av den kropp som ges av olikheterna  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$  och  $y \geq |x|$ .

4. a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} -y dx + (x + y) dy,$$

där  $\gamma$  är den nedre halvan av ellipsen  $4x^2 + y^2 = 4$  från  $(-1, 0)$  till  $(1, 0)$ . (0.5)

b) Bestäm konstanten  $a$  så att kurvintegralen

$$\int_{\gamma} (6x^2 + 2xy + ay^2) dx + (2xy + ax^2) dy$$

blir vägoberoende. Beräkna sedan, för detta värde på  $a$ , kurvintegralens värde för en kurva  $\gamma$  som går från punkten  $(0, 0)$  till punkten  $(1, 1)$ . (0.5)

5. a) Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

i området  $x > 0$ , till exempel genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = x, \\ v = xy. \end{cases} \quad (0.8)$$

b) Är funktionen  $(xy + 1) \ln x + e^{xy}$  en lösning till differentialekvationen? Ingen motivering = inga poäng! (0.2)

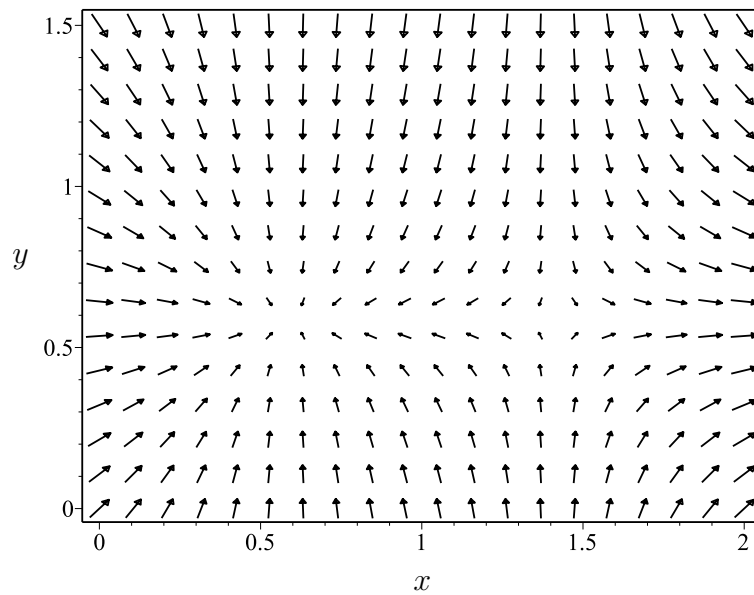
6. I den övre figuren nedan visas  $\text{grad}f(x, y)$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 1.5$ , för någon funktion  $f$ , och i den nedre grafen  $z = g(x) = f(x, 0)$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , för samma funktion  $f$ .

a) Funktionen  $f$  har två stationära punkter. Ange karaktären av dessa. (0.2)

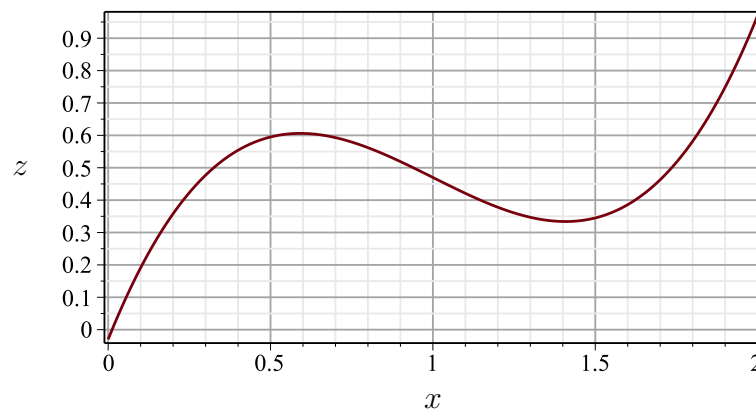
b) Skissera tre olika nivåkurvor till  $f$ . Motivera varför de ser ut som de gör. (0.4)

c) Ge ett approximativt värde av  $f(0, \frac{1}{2})$ . Motivera ditt svar. (0.4)

$\text{grad}f(x, y)$



$z = g(x) = f(x, 0)$



*LYCKA TILL!*