

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D y \, dx \, dy,$$

där D är området som begränsas av linjerna $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = x + 1$ och x -axeln.

2. a) Bestäm största och minsta värde av funktionen

$$f(x, y) = (x - 2)e^{-xy}$$

på området $D = \{(x, y); -1 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 1\}$. (0.8)

- b) Har funktionen i a) största och/eller minsta värde om vi i stället låter $D = \mathbb{R}^2$? Ange dessa i förekommande fall. Glöm inte att motivera ditt svar. (0.2)

3. Funktionen f definieras av $f(x, y, z) = 3xz - 4y - z^2 + 4$.

- a) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(-1, 0, 1)$ i riktningen $(1, 2, -2)$. Bestäm även den riktning i vilken f har störst riktningsderivata i punkten $(-1, 0, 1)$. (0.4)

- b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 0$ i punkten $(-1, 0, 1)$. (0.3)

- c) Finns det någon punkt på nivåytan $f(x, y, z) = 0$ där tangentplanet är parallellt med planet $3x + 2y - z = 5$? Om så är fallet, ange denna punkt. (0.3)

4. a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} xy \, dx - 2y \, dy,$$

där γ är den sammansatta kurva som består av parabeln $y = x^2$ från origo till punkten $(1, 1)$, direkt åtföljd av det räta linjestycket från $(1, 1)$ till $(0, 1)$. (0.5)

- b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{-x}{y^2 - x^2} \, dx + \frac{y}{y^2 - x^2} \, dy,$$

där γ är cirkeln $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ i positiv led från punkten $(1, 2)$ till punkten $(0, 3)$. (0.5)

5. a) Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $g(x, y) = x^3 - 2xy + y^2$. Ange också deras karaktär. (0.4)

- b) Bestäm alla lösningar på formen $f(x, y) = \varphi(xy^2)$ till differentialekvationen

$$xf''_{xy} + yf''_{yy} - 2f'_y = \frac{6}{y}, \quad x, y > 0,$$

där φ är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion av en variabel. (0.6)

VAR GOD VÄND!

6. a) Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + z = 4 \quad \text{och} \quad 2x + z = 4. \quad (0.5)$$

b) Låt γ beteckna skärningen mellan de två ytorna i a)-uppgiften. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y, z) = 2x + 4y + 5z$ på kurvan γ . (0.5)

LYCKA TILL!