LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
ENDIMENSIONELL ANALYS B2/A3
2021-01-09 kl. 8.00–13.45

1. Svar: $\frac{\ln 2}{3}$

Lösningsförslag:
Genom att först förkorta bort en faktor $x+1$ i integranden och därefter partialbråksuppdela erhålles att

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{(x+1)^2(x-2)}\,dx = \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{1}{3}\big[2\ln|x+1| + \ln|x-2|\big]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{3}(2\ln 2 + \ln 1 - 2\ln 1 - \ln 2) = \frac{\ln 2}{3}.$$

2. Svar: $y(x) = \dfrac{2}{e^x(\cos x - \sin x) + 1}$

Lösningsförslag:
Omskrivning och integrering ger att

$$y'e^{-x} - y^2\sin x = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = e^x \sin x \quad\Longleftrightarrow\quad \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int e^x \sin x\,dx.$$

Vidare är

$$\int e^x \sin x\,dx = \int \operatorname{Im}\big(e^{(1+i)x}\big)\,dx = \operatorname{Im}\Big(\int e^{(1+i)x}\,dx\Big)$$

och

$$\int e^{(1+i)x}\,dx = \frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} + C = \frac{1-i}{2}e^x(\cos x + i\sin x) + C =$$
$$= \frac{e^x}{2}\big((\cos x + \sin x) + i(-\cos x + \sin x)\big) + C \qquad (C \in \mathbb{C}).$$

Således är

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(-\cos x + \sin x) + B \qquad (B \in \mathbb{R}).$$

(Alternativt kan ovanstående primitiva funktion bestämmas genom upprepad partialintegrering, se kursboken sid. 288.)

Den allmänna lösningen till differentialekvationen uppfyller därmed att

$$-\frac{1}{y} = \frac{e^x}{2}(-\cos x + \sin x) + B.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger att $B = -\frac{1}{2}$, och därmed är lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y(x) = \frac{2}{e^x(\cos x - \sin x) + 1}.$$

3. Svar: $\dfrac{13}{6}$

Lösningsförslag:

Nedan betecknar B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 samt B_6 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + x^5 B_2(x) \\ \ln(1+x) &= x + x^2 B_3(x), \end{aligned}$$

och därmed är

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + (2x)^3 B_1(2x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3 B_4(x)$$

och

$$\ln\big(1+2x^2\big) = 2x^2 + \big(2x^2\big)^2 B_3\big(2x^2\big) = 2x^2 + x^4 B_5(x).$$

Sålunda gäller att

$$\begin{aligned} &\frac{xe^{2x} - \sin x - \ln\big(1+2x^2\big)}{x^3} = \\ &= \frac{x\big(1 + 2x + 2x^2 + x^3 B_4(x)\big) - \big(x - \frac{x^3}{6} + x^5 B_2(x)\big) - \big(2x^2 + x^4 B_5(x)\big)}{x^3} = \\ &= \frac{\frac{13x^3}{6} + x^4 B_6(x)}{x^3} = \frac{13}{6} + x B_6(x) \longrightarrow \frac{13}{6} \quad \text{då } x \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

4. Svar: $y(t) = \dfrac{75}{4}\Big(1 - e^{-\frac{2}{25}t}\Big) \longrightarrow \dfrac{75}{4}$, då $t \longrightarrow \infty$

Lösningsförslag:

Låt $y(t)$ beteckna volymen (i liter) av vattnet i pölen efter tiden t timmar från att kranen börjat läcka. Då uppfyller y differentialekvationen

$$y' = 1{,}5 - 0{,}08y \quad \Longleftrightarrow \quad y' + \frac{2}{25}y = \frac{3}{2}.$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{\frac{2}{25}t}$ ger att

$$\begin{aligned} e^{\frac{2}{25}t}y' + \frac{2}{25}e^{\frac{2}{25}t}y = \frac{3}{2}e^{\frac{2}{25}t} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(e^{\frac{2}{25}t}y\Big) = \frac{3}{2}e^{\frac{2}{25}t} \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{\frac{2}{25}t}y = \frac{3}{2}\int e^{\frac{2}{25}t}\,dt = \frac{75}{4}e^{\frac{2}{25}t} + C \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{75}{4} + Ce^{-\frac{2}{25}t}, \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger att $C = -\frac{75}{4}$ och därmed gäller att

$$y(t) = \frac{75}{4}\Big(1 - e^{-\frac{2}{25}t}\Big).$$

Gränsvärdet som volymen av vattnet i pölen så småningom kommer att närma sig är således

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{75}{4}\left(1 - e^{-\frac{2}{25}t}\right) = \frac{75}{4}(1-0) = \frac{75}{4}.$$

5. Svar: $z = 1 + 3i$ respektive $z = -3 - i$

Lösningsförslag:
Kvadratkomplettering ger att

$$(z + 1 - i)^2 = 8i.$$

Sätter vi $z + 1 - i = x + iy$, där $x,\ y \in \mathbb{R}$, erhålles att

$$x^2 - y^2 + 2xyi = (x + iy)^2 = 8i,$$

varvid identifikation av real- och imaginärdelar ger upphov till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ \quad 2xy = 8. \end{cases}$$

Dessutom gäller att

$$x^2 + y^2 = |x + iy|^2 = \left|(x + iy)^2\right| = |8i| = 8,$$

och därmed att

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ \quad 2xy = 8 \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

Ledvis addition av första och tredje ekvationen i systemet ovan ger att $x = \pm 2$, medan ledvis subtraktion av samma ekvationer ger att $y = \pm 2$. Den andra ekvationen i systemet visar att x och y har samma tecken. Därmed gäller antingen att $(x, y) = (2, 2)$ eller att $(x, y) = (-2, -2)$, och sålunda är antingen

$$z + 1 - i = 2 + 2i \quad \Longleftrightarrow \quad z = 1 + 3i$$

eller

$$z + 1 - i = -2 - 2i \quad \Longleftrightarrow \quad z = -3 - i.$$

Alternativt kan vi lösa ekvationen genom att övergå till polär form, och göra ansatsen $z + 1 - i = re^{i\theta}$, där $r,\ \theta \in \mathbb{R}$ och $r \geq 0$. Detta ger att

$$\begin{aligned} r^2 e^{i2\theta} &= \left(re^{i\theta}\right)^2 = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \Longleftrightarrow \quad &\begin{cases} r^2 &= 8 \\ 2\theta &= \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases} \qquad \big(k \in \mathbb{Z}\big) \\ \Longleftrightarrow \quad &\begin{cases} r &= 2\sqrt{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \qquad \big(k \in \mathbb{Z}\big). \end{aligned}$$

Med $k = 0$ erhålles

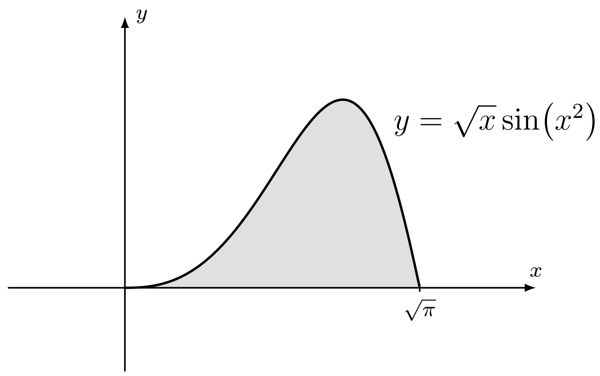
$$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + 2i,$$

medan $k = 1$ ger

$$2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\pi} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot (-1) = -2 - 2i.$$

6. Svar: $\dfrac{\pi^2}{4}$

Lösningsförslag:
I figuren nedan utgör D det skuggade området.



Med skivformeln erhålles den sökta volymen av integralen

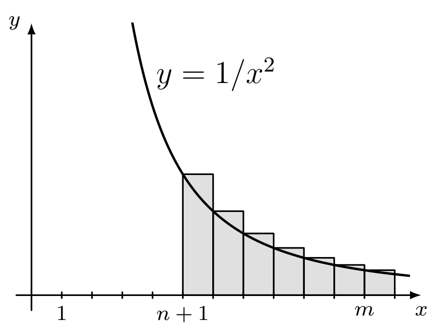
$$\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{x}\sin\left(x^2\right)\right)^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin^2\left(x^2\right) dx =$$
$$= \left[\begin{array}{ll} x^2 = t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt & x = \sqrt{\pi} \Rightarrow t = \pi \end{array}\right] = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt =$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\left(1 - \cos(2t)\right) dt = \frac{\pi}{4}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4},$$

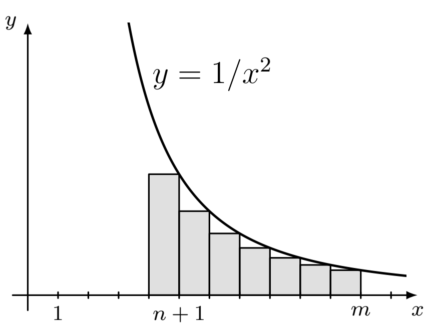
där vi har använt den trigonometriska identiteten $2\sin^2 t = 1 - \cos(2t)$.

7. Svar: Se lösningsförslag

Lösningsförslag:
Av nedanstående figurer framgår att det, för alla heltal n och m sådana att $1 \leq n \leq m$, gäller att

$$\int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{x^2}\,dx \leq s_m - s_n \leq \int_n^m \frac{1}{x^2}\,dx.$$





Genom att låta $m \to \infty$ erhålles att

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \leq s - s_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

För varje tal $a > 0$ är

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{X\to\infty}\int_a^X \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{X\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^X = \lim_{X\to\infty}\left(-\frac{1}{X}+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}.$$

Således gäller, för varje positivt heltal n, att

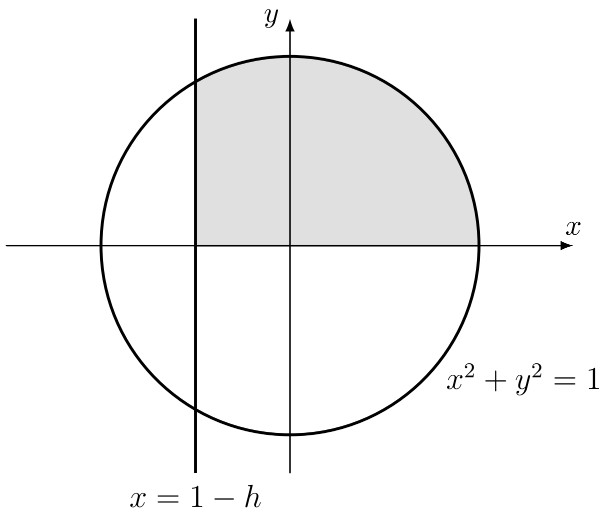
$$\frac{1}{n+1} \le s - s_n \le \frac{1}{n}.$$

8. Svar: $\dfrac{3(2-h)^2}{4(3-h)}$

Lösningsförslag:
Låt S vara det begränsade område i xy-planet som innesluts av linjerna $y = 0$ och $x = 1 - h$ samt kurvstycket

$$y = \sqrt{1-x^2}, \qquad 1-h \le x \le 1,$$

där $0 < h < 2$ (se figur nedan). Då S roterar ett varv kring x-axeln genereras en klotkalott med höjden h i ett klot med radien 1, dvs. vi erhåller klotkalotten K.



Eftersom K har konstant densitet, säg ρ, så ges tyngdpunktens läge x_T längs x-axeln av

$$x_T = \frac{\int_K x\,dm}{\int_K dm} = \frac{\int_K x\rho\,dV}{\int_K \rho\,dV} = \frac{\int_K x\,dV}{\int_K dV}.$$

Då klotets centrum är beläget vid $x = 0$ måste (absolutbeloppet av) x_T även utgöra det sökta avståndet mellan tyngdpunkten och klotets centrum. Enligt skivformeln ges volymelementet dV av

$$dV = \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi\left(1-x^2\right)dx,$$

och därmed har K volymen

$$\int_K dV = \pi \int_{1-h}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{1-h}^{1} = \pi \left(1 - \frac{1}{3} - (1-h) + \frac{(1-h)^3}{3}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(2 - 3(1-h) + (1-h)^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(2 - 3 + 3h + 1 - 3h + 3h^2 - h^3\right) =$$
$$= \frac{\pi}{3} h^2 (3-h).$$

Vidare är

$$\int_K x\, dV = \pi \int_{1-h}^{1} x\left(1 - x^2\right) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{1-h}^{1} =$$
$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{(1-h)^2}{2} + \frac{(1-h)^4}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(1 - 2(1-h)^2 + (1-h)^4\right) =$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - 2 + 4h - 2h^2 + 1 - 4h + 6h^2 - 4h^3 + h^4\right) = \frac{\pi}{4} h^2 \left(4 - 4h + h^2\right) =$$
$$= \frac{\pi}{4} h^2 (2-h)^2.$$

Således är

$$x_T = \frac{\int_K x\, dV}{\int_K dV} = \frac{\frac{\pi}{4} h^2 (2-h)^2}{\frac{\pi}{3} h^2 (3-h)} = \frac{3(2-h)^2}{4(3-h)},$$

vilket också är avståndet mellan tyngdpunkten och klotets centrum.

9. Svar: T.ex. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx \approx \frac{1703}{1800}$

Lösningsförslag:

Maclaurinutveckling av ordning $2n$ med restterm på Lagranges form ger att

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos(\theta x) x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

där $0 \leq \theta \leq 1$. Således gäller (även för $x = 0$) att

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos(\theta x) x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Låt

$$p_n(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!},$$

och låt

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{\cos(\theta x) x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Felet då $\int_0^1 f(x)\, dx$ approximeras med $\int_0^1 p_n(x)\, dx$ kan uppskattas på följande vis:

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 p_n(x)\, dx \right| = \left| \int_0^1 \left(f(x) - p_n(x)\right) dx \right| \leq \int_0^1 \left| f(x) - p_n(x) \right| dx =$$
$$= \int_0^1 \left| R_{n+1}(x) \right| dx = \int_0^1 \frac{|\cos(\theta x)| x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx =$$
$$= \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

(Notera att funktionerna $f(x)$ och $R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x)$ är kontinuerliga och därmed integrerbara över intervallet $[0, 1]$.)

Genom prövning ser vi att $n = 2$ ger

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} = \frac{1}{5 \cdot 5!} = \frac{1}{600} > \frac{1}{10000},$$

medan $n = 3$ ger

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} = \frac{1}{7 \cdot 7!} = \frac{1}{35280} < \frac{1}{10000}.$$

Således ger approximation av $\int_0^1 f(x)\,dx$ med $\int_0^1 p_3(x)\,dx$ ett fel mindre än 0,0001. Det approximativa värdet är

$$\int_0^1 p_3(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} = \frac{1703}{1800}.$$