Endimensionell analys B2/A3, 2020-01-11, Lösningar

1. Första ekvationen: En integrerande faktor är e^x, så vi får

$$y' + y = x \quad \Leftrightarrow \quad e^x y' + e^x y = e^x x \quad \Leftrightarrow \quad \big(e^x y\big)' = e^x x$$
$$\Leftrightarrow \quad e^x y = \int e^x x\, dx \overset{part.int.}{=} e^x x - e^x + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Begynnelsevärdet $y(0) = 1$ ger $C = 2$, så lösningen blir $\underline{\underline{y(x) = x - 1 + 2e^{-x}}}$.

Andra ekvationen: Metoden med separabla variabler ger

$$\frac{dy}{dx} \cdot y = x \quad \Leftrightarrow \quad \int y\, dy = \int x\, dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$
$$\Leftrightarrow \quad y^2 = x^2 + D \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \pm\sqrt{x^2 + D} \qquad (x^2 + D \geq 0).$$

Eftersom y skall vara positiv (vi rör oss kring $y = 1$) får vi $y(x) = \sqrt{x^2 + D}$, och begynnelsevärdet $y(0) = 1$ ger $D = 1$. Svaret blir alltså $\underline{\underline{y(x) = \sqrt{x^2 + 1}}}$.

2. Arean är

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx = \left[\sqrt{x^2 + 4}\right]_0^2 = \sqrt{8} - \sqrt{4} = \underline{\underline{2(\sqrt{2} - 1)}}.$$

Rotationsvolymen är

$$\pi \int_0^2 \frac{x^2}{x^2 + 4}\, dx \overset{pol.div.}{=} \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{x^2 + 4}\right) dx = \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}\right) dx =$$
$$= \pi \left[x - 2\arctan\frac{x}{2}\right]_0^2 = \pi(2 - 2\arctan 1) = \underline{\underline{2\pi - \frac{\pi^2}{2}}}.$$

3. Vi provar att sätta $p(x)$ till Maclaurinpolymet av grad 2 till $f(x) = \ln(1+2x)$. Då $f'(x) = \frac{2}{1+2x}$, $f''(x) = -\frac{4}{(1+2x)^2}$ och $f^{(3)}(x) = \frac{16}{(1+2x)^3}$ får vi Maclaurinutvecklingen

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(\theta x)}{3!}x^3 = 2x - 2x^2 + \frac{16}{6(1 + 2\theta x)^3}x^3, \qquad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Med $\underline{\underline{p(x) = 2x - 2x^2}}$ blir alltså

$$|\ln(1 + 2x) - p(x)| = \left|\frac{16}{6(1 + 2\theta x)^3}x^3\right| = \frac{8}{3}\left|\frac{1}{(1 + 2\theta x)^3}\right| |x|^3 \leq \frac{8}{3} \cdot 1 \cdot |x|^3 < 3|x|^3$$

då $0 \leq \theta \leq 1$ och $x \geq 0$, och vi ser att olikheten i uppgiften gäller.

4. Homogena ekvationen $y'' - y' - 2y = 0$: Den karakteristiska ekvationen $r^2 - r - 2 = 0$ har lösningarna $r = -1$ och $r = 2$, vilket ger lösningen

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x},$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

Partikulärlösning till $y'' - y' - 2y = xe^x$: Vi gör ansatsen $y_p(x) = z(x)e^x$, deriverar denna och stoppar in i ekvationen:

$$y'' - y' - 2y = (z'' + 2z' + z)e^x - (z' + z)e^x - 2ze^x = xe^x \quad \Leftrightarrow \quad z'' + z' - 2z = x.$$

Nu ansätter vi $z = Ax + B$, vilket ger

$$0 + A - 2(Ax + B) = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2A & = 1 \\ A - 2B & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A & = -\frac{1}{2} \\ B & = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

En partikulärlösning är alltså $y_p(x) = -\frac{1}{4}(2x + 1)e^x$, och alla lösningar till ekvationen ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \tfrac{1}{4}(2x + 1)e^x}}.$$

5. Första integralen: Vi gör först en partialbråksuppdelning. Ansatsen

$$\frac{2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

ger $A = 2$, $B = -2$ och $C = 0$. Vi får därför

$$\int_1^X \frac{2}{x(x^2 + 1)}\, dx = \int_1^X \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \left[2\ln x - \ln(x^2 + 1) \right]_1^X =$$

$$= 2\ln X - \ln(X^2 + 1) - (2\ln 1 - \ln 2) =$$

$$= \ln \frac{X^2}{X^2 + 1} + \ln 2 \;\to\; \ln 1 + \ln 2 = \ln 2 \qquad \text{då } X \to \infty.$$

Integralen är alltså $\underline{\underline{\text{konvergent}}}$ med värdet $\underline{\underline{\ln 2}}$.

Andra integralen: För stora x dominerar termen x^3 över e^{-x} i nämnaren, så integranden är av storleksordning $2/x^3$. Eftersom

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^3}\, dx = 2 \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\, dx$$

är konvergent (enligt Sats 13.11 på sidan 326 eller en direkt uträkning) misstänker vi därför att vår ursprungliga integral är konvergent. Detta verifierar vi genom att konstatera att

$$0 \le \frac{2}{x^3 + e^{-x}} \le \frac{2}{x^3}$$

för alla $x \ge 1$ och använda en jämförelsesats (Sats 13.10 på sidan 326). Vår integral är alltså $\underline{\underline{\text{konvergent}}}$.

6. Första ekvationen: Vi kvadratkompletterar först vänsterledet:

$$z^2 - 2z + 4 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - 1)^2 + 3 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(z - 1)^2 = -3 + 4i \quad \Leftrightarrow \quad w^2 = -3 + 4i,$$

där $w = z - 1$. Sätter vi $w = a + bi$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 & \text{(Re lika)} \\ 2ab = 4 & \text{(Im lika)} \\ a^2 + b^2 = 5 & \text{(Abs lika)} \end{cases}.$$

Genom addition respektive subtraktion av den första och den tredje ekvationen ovan ser vi att $a^2 = 1$ och $b^2 = 4$, vilket ger $a = \pm 1$ och $b = \pm 2$. Den andra ekvationen är uppfylld då a och b har lika tecken, och vi får lösningarna $w_1 = 1 + 2i$ och $w_2 = -1 - 2i$, vilket efter återgång till z ger $\underline{\underline{z_1 = 2 + 2i}}$ respektive $\underline{\underline{z_2 = -2i}}$.

Andra ekvationen: Då $z = i$ är en lösning säger faktorsatsen att $z - i$ är en faktor i vänsterledet. Polynomdivision ger

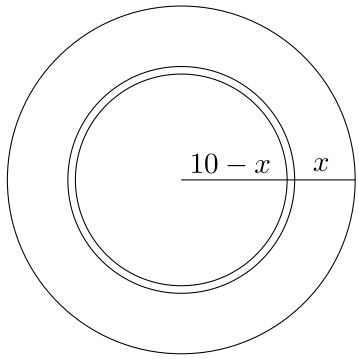
$$z^3 - (2 + i)z^2 + (4 - 2i)z - 4 - 4i = (z - i)(z^2 - 2z + 4 - 4i),$$

och vi ser att våra två övriga lösningar är precis de till $z^2 - 2z + 4 - 4i = 0$, vilka vi tagit fram ovan. Vår ekvation har alltså lösningarna $\underline{\underline{z_1 = i}}$, $\underline{\underline{z_2 = 2 + 2i}}$ och $\underline{\underline{z_3 = -2i}}$.

7. Vi tittar på en tunn "ring" av ön. Om avståndet till kusten är x så är ringens radie $10 - x$, så omkretsen blir $2\pi(10 - x)$. Om tjockleken är dx blir därför ringens area $dA = 2\pi(10 - x)\,dx$. Eftersom piratdensiteten är proportionell mot avståndet till kusten är denna $\rho(x) = k \cdot x$ för någon konstant k, och med det angivna värdet mitt på ön har vi $\rho(10) = 10k = \frac{150}{\pi}$, dvs. $k = \frac{15}{\pi}$ och $\rho(x) = \frac{15}{\pi}x$. Antalet pirater i ringen således blir $dp = \rho(x)dA = \frac{15}{\pi}x \cdot 2\pi(10 - x)\,dx = 30(10x - x^2)\,dx$. Det totala antalet pirater på ön är därför

$$\int_{\text{ön}} dp = \int_0^{10} 30(10x - x^2)\,dx =$$

$$= 30\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = 10(15 \cdot 100 - 1000) = \underline{\underline{5000}}.$$



8. Första sjön: Om vi låter $y(t)$ ange antalet ton giftigt material vid tiden t timmar så kan vi modellera förloppet med differentialekvationen

$$y'(t) = -500 \cdot \frac{y(t)}{10^5} \qquad \Leftrightarrow \qquad y'(t) = -\tfrac{1}{200}y(t),$$

och låter vi $t = 0$ svara mot tidpunkten då lastbilen kraschar får vi begynnelsevärdet $y(0) = 8$. Metoden med integrerande faktor ger

$$y' = -\tfrac{1}{200}y \quad \Leftrightarrow \quad y' + \tfrac{1}{200}y = 0 \quad \overset{\text{int. faktor } e^{t/200}}{\Leftrightarrow} \quad \big(ye^{t/200}\big)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad ye^{t/200} = C \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = Ce^{-t/200}.$$

Begynnelsevärdet ger vidare $C = 8$, och funktionen som anger mängden gift i den första sjön blir $y(t) = 8e^{-t/200}$.

Andra sjön: Vi låter nu $z(t)$ beteckna antalet ton giftigt material i den andra sjön vid tiden t timmar, och $t = 0$ som ovan svara mot tidpunkten då lastbilen kraschar och det giftiga vattnet börjar anlända till sjön. Förloppet kan nu modelleras med differentialekvationen

$$z'(t) = 500 \cdot \frac{8e^{-t/200}}{10^5} - 500 \cdot \frac{z(t)}{2 \cdot 10^5} \qquad \Leftrightarrow \qquad z'(t) = \tfrac{1}{25}e^{-t/200} - \tfrac{1}{400}z(t),$$

där vi utnyttjar funktionen $y(t) = 8e^{-t/200}$ från a)-uppgiften, och vi har begynnelsevärdet $z(0) = 0$. Löser vi ekvationen med integrerande faktor får vi

$$\begin{aligned}
& z' = \tfrac{1}{25}e^{-t/200} - \tfrac{1}{400}z && \Leftrightarrow && z' + \tfrac{1}{400}z = \tfrac{1}{25}e^{-t/200} \\
\overset{\text{int. faktor } e^{t/400}}{\Leftrightarrow} \quad & \left(ze^{t/400}\right)' = \tfrac{1}{25}e^{-t/400} && \Leftrightarrow && ze^{t/400} = \int \tfrac{1}{25}e^{-t/400}\,dt \\
\Leftrightarrow \quad & ze^{t/400} = -16e^{-t/400} + C && \Leftrightarrow && z(t) = -16e^{-t/200} + Ce^{-t/400}.
\end{aligned}$$

Begynnelsevärdet ger nu att $C = 16$, och funktionen som anger mängden gift i den andra sjön blir således $\underline{\underline{z(t) = 16(e^{-t/400} - e^{-t/200})}}$.

9. Låt $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Derivering ger $f'(x) = -\frac{2}{(2x-1)^2} < 0$ då $x \geq 1$, vilket ger att f är avtagande då $x \geq 1$. Enligt (13.28) på sidan 331 gäller det därför att

$$\int_1^n f(x)\,dx + f(n) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx + f(1).$$

Då ln är växande kan vi därför göra uppskattningarna

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} &\leq \frac{1}{\ln n}\left(\int_1^n \frac{1}{2x-1}\,dx + \frac{1}{2\cdot 1 - 1}\right) = \frac{1}{\ln n}\left(\left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_1^n + 1\right) = \\
&= \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{2}\ln(2n-1) + 1\right) \leq \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{2}\ln(2n) + 1\right) = \\
&= \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln n + 1\right) = \frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\ln n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln n}
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} &\geq \frac{1}{\ln n}\left(\int_1^n \frac{1}{2x-1}\,dx + \frac{1}{2\cdot n - 1}\right) = \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{2}\ln(2n-1) + \frac{1}{2n-1}\right) \geq \\
&\geq \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{\ln n}.
\end{aligned}$$

Vi kan alltså stänga in vår summa enligt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{\ln n} \;\leq\; \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \;\leq\; \frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\ln n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln n}.$$

Låter vi nu $n \to \infty$ får vi

$$\frac{1}{2} \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \;\leq\; \frac{1}{2},$$

så gränsvärdet existerar alltså och är lika med $\frac{1}{2}$.

10. Arean under kurvan $y = f(x)$ från a till b ges av

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

och längden av

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Dessa är uppenbarligen lika då integranderna är lika, så vi löser differentialekvationen

$$f(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Vi ser att det måste gälla att $f(x) \geq 1$, och även att den konstanta funktionen $f(x) = 1$ är en lösning. Kvadrering och ommöblering ger

$$f'(x)^2 = f(x)^2 - 1 \quad \text{dvs.} \quad f'(x) = \pm\sqrt{f(x)^2 - 1},$$

så för $f \neq 1$ får vi de två fallen

$$\int \frac{df}{\sqrt{f^2 - 1}} = \int 1\,dx \qquad \text{och} \qquad \int \frac{df}{\sqrt{f^2 - 1}} = \int -1\,dx.$$

Integrering ger, med hjälp av (12.12) på sidan 282,

$$\ln\Big(f + \sqrt{f^2 - 1}\Big) = x + C_1 \qquad \text{respektive} \qquad \ln\Big(f + \sqrt{f^2 - 1}\Big) = -x + C_2,$$

och löser vi här ut f finner vi att

$$f(x) = \frac{e^{x + C_1} + e^{-(x + C_1)}}{2} = \frac{D_1}{2}e^x + \frac{1}{2D_1}e^{-x} \qquad \text{där } D = e^{C}_{1}, \tag{1}$$

respektive

$$f(x) = \frac{e^{x - C_2} + e^{-(x - C_2)}}{2} = \frac{D_2}{2}e^x + \frac{1}{2D_2}e^{-x} \qquad \text{där } D = e^{-C_2}. \tag{2}$$

För att visa att de funktioner f vi hittat ovan är de enda som ger samma mätetal för arean och kurvlängden noterar vi att det måste gälla att

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt$$

för alla $x > 0$. Deriverar vi denna relation med avseende på x ger analysens huvudsats

$$f(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2},$$

och vi ser att vi hittat alla funktioner ovan. Vi får alltså slutligen lösningarna

$$\underline{\underline{f(x) = 1}} \qquad \text{och} \qquad \underline{\underline{f(x) = \frac{D}{2}e^x + \frac{1}{2D}e^{-x}}}, \quad D > 0.$$

Anmärkning: Våra lösningar i (1) och (2) ovan kan skrivas som $\cosh(x + C_1)$ respektive $\cosh(x - C_2)$, så de är translationer av cosinushyperbolicus. I själva verket kan dessa ”klistras ihop” med $f(x) = 1$ för att få en mer allmän lösning: Låt $x_0 \leq x_1$ vara godtyckliga. Denna allmänna lösning blir då

$$\underline{\underline{f(x) = \begin{cases} \cosh(x - x_0), & x \leq x_0, \\ 1, & x_0 < x < x_1, \\ \cosh(x - x_1), & x_1 \leq x. \end{cases}}}$$