LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS B2/A3
2019-05-03

1. Svar:

$$\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}, \qquad -\frac{1}{2}\cos x^2+C.$$

Lösning:

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$$

(eller använd partialbråksuppdelning).

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} x\sin x\,dx &= \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4}\cos x\,dx \\ &= -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}.\end{aligned}$$

$$\int x\sin x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C.$$

2. Svar: Lösningarna är $z=\pm1\pm i$ (där alla fyra kombinationer av $\pm$ ska vara med). Faktoriseringen är

$$x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

Lösning: Ekvationen är ekvivalent med den binomiska ekvationen $z^4=-4$. Denna löses bäst i polära koordinater, så vi sätter $z=re^{i\varphi}$ vilket ger

$$r^4e^{4i\varphi}=4e^{i\pi}.$$

Detta ger ekvationer för absolutbelopp och argument:

$$\begin{cases} r^4=4, \\ 4\varphi=\pi+n2\pi, \qquad n\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

eller ekvivalent

$$\begin{cases} r=\sqrt{2}, \\ \varphi=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}, \qquad n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Detta ger de fyra olika lösningarna $z=\sqrt{2}e^{i(\pi/4+n\pi/2)}$, $n=0,1,2,3$, eller ekvivalent $z=\pm1\pm i$ (där alla fyra kombinationer av $\pm$ ska vara med).
Faktorsatsen och sedan konjugatregeln ger att

$$\begin{aligned} z^4+4 &= (z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i) \\ &= ((z-1)^2-i^2)((z+1)^2-i^2) \\ &= (z^2-2z+2)(z^2+2z+2), \end{aligned}$$

för alla komplexa tal z.

I specialfallet då $z = x$ är reellt får vi alltså

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

Från faktorsatsen följer det att det inte går att faktorisera i lägre grad med reella faktorer eftersom det inte finns några reella nollställen till polynomet $p(x) = x^4 + 4$.

3. Svar:

a)

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x.$$

b)

$$y = \frac{1}{2}(4 + x^2)\ln(4 + x^2) + C(4 + x^2),$$

Lösning:

a) Den homogena ekvationen $y'' + y = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Den allmänna lösningen till den givna ekvationen är summan av denna homogena lösning och en (valfri) partikulärlösning. Vi ansätter en partikulärlösning på formen $y_p(x) = Ae^x$ och sätter in i ekvationen. Insättning i differentialekvationen ger $Ae^x + Ae^x = e^x$, d.v.s. $A = 1/2$. En partikulärlösning är alltså $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$ och den allmänna lösningen till ekvationen är

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x.$$

b) Detta är en linjär första ordningens ekvation, och den löser vi t ex med hjälp av en integrerande faktor

$$e^{-\int \frac{2x}{4+x^2}\,dx} = e^{-\ln(4+x^2)} = \frac{1}{4+x^2}.$$

Om vi multiplicerar differentialekvationen med denna får vi

$$\frac{1}{4+x^2}y' - \frac{2x}{(4+x^2)^2}y = \frac{x}{4+x^2},$$

eller, ekvivalent,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4+x^2}y\right) = \frac{x}{4+x^2}.$$

En primitiv funktion till höger- och vänsterledet kan endast skilja sig åt med en konstant, och därför är

$$\frac{y}{4+x^2} = \frac{1}{2}\ln(4+x^2) + C,$$

d.v.s.

$$y = \frac{1}{2}(4+x^2)\ln(4+x^2) + C(4+x^2),$$

vilket är den allmänna lösningen.

4. Svar:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 B_1(x),$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^4 B_2(x).66666$$

Gränsvärdet är -2.

Lösning: Genom derivering och Maclaurins formel (eller från minnet) får vi fram att

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 B_1(x),$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^4 B_2(x),$$

där B_1 och B_2 är funktioner som är definierade och begränsade nära $x = 0$. Om vi ersätter x med $2x$ i det första uttrycket ovan får vi

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + 8x^3 B_1(2x),$$

och vi använder alla tre uttrycken i gränsvärdet

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2\ln(1+x)}{1-\cos(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2x^2 + 8x^3 B_1(2x) - 2x + x^2 - 2x^3 B_1(x)}{1 - 1 + \frac{1}{2}x^2 - x^4 B_2(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + x^3 B_3(x)}{\frac{1}{2}x^2 - x^4 B_2(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-1 + x B_3(x)}{\frac{1}{2} - x^2 B_2(x)} = -2,
\end{aligned}$$

där vi introducerade en ny funktion $B_3(x)$ som är begränsad nära $x = 0$.

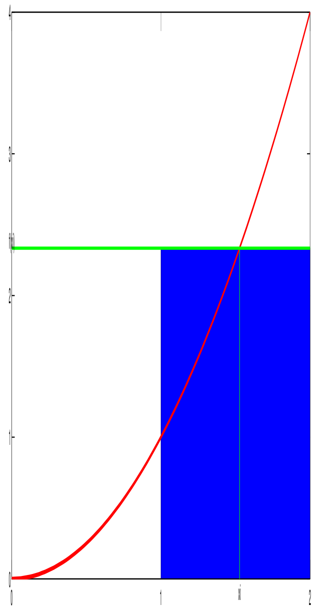
5. Lösning: *Integralkalkylens medelvärdessats:* Antag att funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Då finns det en punkt ξ, $a \leq \xi \leq b$, sådan att

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b - a).$$

I figuren till höger är grafen till $y = x^2$ plottad. Den blå rektangeln har samma area som arean som begränsas av grafen, x-axeln och linjerna $x = 1$ och $x = 2$. Detta är en illustrering av satsen eftersom vänsterledet i satsen är arean under grafen och högerledet är rektangelns area. Det är klart att $f(x) = x^2$ är kontinuerlig på $\mathbb{R}$ och speciellt på intervallet $[1, 2]$. Med satsens beteckningar är alltså $a = 1$ och $b = 2$. Vi behöver kontrollera att det finns ett tal $\xi \in [1, 2]$ sådant att

$$\xi^2 = \int_1^2 x^2\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{7}{3}.$$

Det går bra då $\xi = \sqrt{7/3}$, och vi har kontrollerat att satsen stämmer för vårt exempel.



6. Svar: Ellipsoidens volym är $\dfrac{4\pi ab^2}{3}$ och rugbybollens volym är $\dfrac{18000}{\pi} cm^3$.
Lösning: Vi börjar med att lösa ut variabeln y som funktion av x, vilket (om vi väljer den positiva lösningen vilket motsvarar den övre halvan av ellipsen) ger

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Ellipsen skär x-axeln då $x = \pm a$. Med skivformeln får vi då ellipsoidens volym till

$$V = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4\pi ab^2}{3}.$$

Vi kan räkna ut bollens volym med hjälp av formeln för ellipsoidens volym om vi känner a och b. Ellipsoidens symmetriaxel är x-axeln, och därför är $a = 30/2 = 15$. För att räkna ut b använder vi att omkretsen är 60, men också $2\pi b$. Vi har alltså $b = 30/\pi$ och bollens volym är därför

$$V = \frac{4\pi \cdot 15 \cdot 30^2}{3 \cdot \pi^2} = \frac{18000}{\pi},$$

där enheten är cm^3.

7. Svar: Den andra funktionen är $Ce^{\arctan x}$, där C är en godtycklig konstant.
Lösning: Eftersom svaret blev rätt, så måste

$$f'(x)g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

för dessa funktioner. Vi sätter in $f(x) = e^{1/x}$ och $f'(x) = -e^{1/x}/x^2$ i uttrycket ovan, och får följande villkor för $g(x)$:

$$-\frac{1}{x^2}e^{1/x}g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}g(x) + e^{1/x}g'(x).$$

Vi kan förkorta bort $e^{1/x}$ eftersom den aldrig är 0 och får då efter förenkling den linjära första ordningens differentialekvationen

$$g'(x) - \frac{1}{1+x^2}g(x) = 0.$$

(Ekvationen är även separabel, och detta ger ett ytterligare sätt att lösa den på.) En integrerande faktor är

$$e^{-\int \frac{1}{1+x^2}\,dx} = e^{-\arctan x}.$$

Vi multiplicerar differentialekvationen med denna, och den kan sedan skrivas om som

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\arctan x}g(x)\right) = 0,$$

vilken efter integration blir

$$e^{-\arctan x}g(x) = C,$$

för en godtycklig konstant C, d.v.s. $g(x) = Ce^{\arctan x}$, där C är en godtycklig konstant.

8. Svar:$12\pi/5$.
Lösning: Vi börjar med att lösa ut $|y|$ som funktion av x, och får då

$$|y| = \left(1 - |x|^{2/3}\right)^{3/2}.$$

Vi ser också att x och y båda ligger mellan -1 och 1 på kurvan, vilken skär x-axeln då $x = \pm 1$. Då det är en rotationsarea och kurvan är symmetrisk kring x-axeln, så räcker det att betrakta delen då $0 \leq y \leq 1$. Eftersom kurvan är symmetrisk kring y=axeln, kan vi nöja oss att studera området då $0 \leq x \leq 1$ om vi multiplicerar det slutgiltiga resultatet med 2. Därför betraktar vi funktionen

$$y(x) = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$$

då $0 \leq x \leq 1$. Den har derivatan

$$y'(x) = \frac{3}{2}\left(1 - x^{2/3}\right)^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -\left(1 - x^{2/3}\right)^{1/2} x^{-1/3},$$

och alltså är

$$\sqrt{1 + y'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{1 - x^{2/3}}{x^{2/3}}} = x^{-1/3}.$$

Enligt formeln för rotationsarea är

$$A = 4\pi \int_0^1 y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = 4\pi \int_0^1 \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2} x^{-1/3}\, dx$$
$$= 4\pi \left[-\frac{2}{5}(1 - x^{2/3})^{5/2} \cdot \frac{3}{2}\right]_0^1 = \frac{12\pi}{5}.$$

9. Lösning: Vi inför ett koordinatsystem så att y-axeln är lodrät och skålens botten motsvarar $y = 0$. Om det finns vatten upp till nivå $y = h$, så ges volymen i skålen av

$$V(h) = \int_0^h A(y)\, dy,$$

där $A(y)$ är skålens tvärsnittsarea vid höjd y. Vi får anta att A är en kontinuerlig funktion av y. Analysens huvudsats ger att $V'(h) = A(h)$. Höjden h för vattenytan är en funktion av tiden, $h = h(t)$, och volymen förändras som funktion av tiden som den sammansatta funktonen $V(h(t))$. Dess derivata med avseende på t är

$$\frac{d}{dt}V(h(t)) = V'(h(t))h'(t) = A(h(t))h'(t).$$

Vi vet också från uppgiftsformuleringen att volymförändringen per tidsenhet är proportionell mot vattenytans area, d.v.s

$$\frac{d}{dt}V(h(t)) = -kA(h(t)).$$

Kombinerar vi dessa två ekvationer kan vi förkorta bort $A(h(t))$, vilket ger $h'(t) = -k$, vilket var det vi ville visa.

10. **Lösning:** Denna typ av differentialekvation har vi inte stött på i kursen, så vi kan inte lösa den direkt med kursens metoder. Vi noterar att y/x förekommer på två ställen i ekvationen, och vi provar därför vad som händer om vi ersätter y/x med z. Vi får då en ny differentialekvation med z som beroende och x som oberoende variabel. Vi har $y(x) = xz(x)$ och därför är $y' = z + xz'$. Vi sätter in detta i ekvationen och får

$$z + xz' = z + \sqrt{1 + z^2},$$

vilket förenklas till

$$xz' = \sqrt{1 + z^2},$$

en separabel ekvation som kan lösas med metoder från kursen. Separerar vi den så får vi

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{1}{x}\, dx,$$

vilken integreras till

$$\ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \ln x + \ln C,$$

för en godtycklig positiv konstant C (och då är $\ln C$ en godtycklig reell konstant). Notera att $z + \sqrt{1 + z^2}$ alltid är positivt oavsett tecken på z, och därför behövs inget absolutbelopp i logaritmen.

Detta ger

$$z + \sqrt{1 + z^2} = Cx.$$

Vi förenklar genom att flytta över allt utom rottermen till högerledet och kvadrera, vilket ger

$$1 + z^2 = (Cx - z)^2,$$

och kan förenklas till

$$z = \frac{C^2x^2 - 1}{2Cx} = \frac{1}{2}\left(Cx - \frac{1}{Cx}\right).$$

Nu kan vi ersätta z med y/x för att få lösningen för y som funktion av x, och detta ger

$$y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right),$$

där C är en godtycklig positiv konstant.