**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**Lösningsförslag**
**ENDIMENSIONELL ANALYS**
**DELKURS B2/A3**
**2016–08–19 14–19**

**1.** a) Eftersom polynomet har reella koefficienter är också $\bar{z} = 1 - 3i$ en lösning, och polynomet delas därför av $(z - (1+3i))(z - (1-3i)) = z^2 - 2z + 10$. Dividerar vi ursprungspolynomet med detta får vi kvoten $z^2 + 2z + 10$, vars lösningar genom kvadratkomplettering är $1 \pm 3i$. Svaret är $\pm 1 \pm 3i$.

b) Geometriskt betyder det alla punkter vars avstånd till $-2$ är större än eller lika med avståndet till 2. Detta uppfylls av alla punkter i det högra halvplanet: Re $z \geq 0$.

**2.** a) Se läroboken

b) Insättning i formeln i a) ger att

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2(1+2\xi)^{3/2}}x^2, \quad 0 < \xi < x.$$

Eftersom $(1+2\xi)^{-3/2} \leq (1 + 2\cdot 0)^{-3/2}$ då $\xi > 0$ följer att

$$|\sqrt{1+2x} - (1+x)|) = |\frac{1}{2(1+2\xi)^{3/2}}x^2| \leq \frac{1}{2}x^2, \quad x \geq 0.$$

**3.** a) Om du vill beräkna volymen av en kropp kan du skära den i tunna skivor och beräkna varje skivas volym som arean $A(x)$ gånger tjockleken $dx$ för att sedan summera dessa. Då skivorna blir oändligt tunna övergår summan i integralen.

b) Tvärsnittsarean ges av

$$A(x) = \pi y^2 = \frac{\pi}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Enligt skivformeln ges därför volymen av

$$V = \int_1^\infty \frac{\pi}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2} = 2\pi[\arctan t]_1^\infty = 2\pi(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{2}$$

**4.** a) Bestäm

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}} = \left\{ \begin{array}{c} u = \sqrt{1+x} \\ x = u^2 - 1 \\ dx = 2udu \end{array} \right\} \int \frac{1}{(2-u^2)u} 2udu = 2\int \frac{du}{(\sqrt{2}-u)(\sqrt{2}+u)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int (\frac{1}{\sqrt{2}-u} + \frac{1}{\sqrt{2}+u})du = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}} \right| + C$$

b) Se läroboken

**5.** a) Vi har att

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = A\cos x + B\sin x + 1 & \text{om } x < \pi/2 \\ y_2(x) = C\cos x + D\sin x + 2 & \text{om } x > \pi/2 \end{cases}$$

Villkoren $y_1(0) = y_1'(0) = 0$ medför att $A = -1$ och $B = 0$, så $y_1(x) = 1 - \cos x$. Det följer att $y_1(\pi/2) = 1, y_1'(\pi/2) = 1$. Eftersom dessa också är startvärden för $y_2$, så bestämmer de $C$ och $D$ till $D = -1$, $C = -1$. Vi får därför $y_2(x) = -\cos x - \sin x + 2$ och slutligen $y_2(\pi) = 3$. Svaret är alltså 3.

b) Två (av flera möjliga) alternativ är:

1. Integranden är positiv så integralen kan bara vara noll då $1/x = x$, alltså $x = 1$.

2. Derivatan är

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^{-4}}}(-\frac{1}{x^2}) = \frac{2}{\sqrt{1+x^4}} > 0$$

så funktionen är strängt växande då $x > 0$. När $x < 1$ är $1/x > x$ och integralen negativ, medan den är positiv om $x > 1$. När $x = 1$ är integrationsgränserna samma och integralen noll.

**6.** Villkoren ger differentialekvationen

$$N' = 0.003N - 0.001N^2 - 0.002 = \frac{1}{1000}(3N - N^2 - 2), \qquad N(0) = 20.$$

Detta är en separabel differentialekvation

$$\int \frac{dN}{(N-1)(N-2)} = -\frac{1}{1000}\int dt \quad \Leftrightarrow \quad \int (\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-2})dN = -\frac{t}{1000}.$$

Integration ger

$$\ln|\frac{N-2}{N-1}| = -t/1000 + C$$

där $C$ bestäms av att $N(0) = 20$ till $\ln(18/19)$. Detta ger $(N-2)/(N-1) = 18e^{-t/1000}/19$, och efter ytterligare några räkningar

$$N(t) = \frac{38 - 18e^{-t/1000}}{19 - 18e^{-t/1000}}.$$